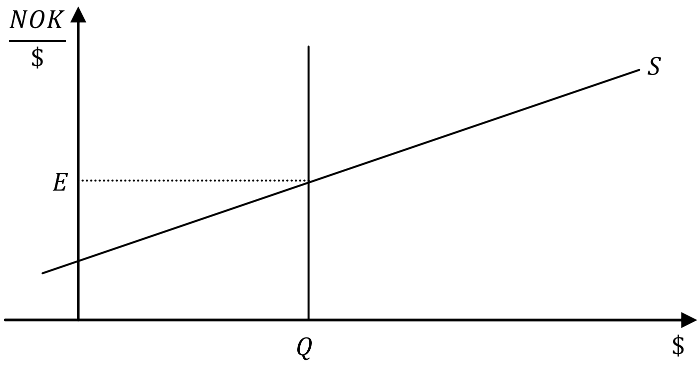
1. Porteføljevalg, rente og valuta

1A. Valutamarkedet (Rødseth kap. 1)

- Innledende om det utenlandske valutamarkedet:
  - Pris: Valutakursen, uttrykt som prisen på 1$ i NOK: $E = \frac{NOK}{\$}$.
  - Kvantum: Netto dollarbeholdning (valutareserver) hos sentralbanken.



  - Litt om valutakursen:
    - Tradisjonell tilnærming: Eksport og import
      - Eksportører trenger å konvertere utenlandsk valuta til innenlandsk for å finansiere produksjonen hjemme, importører trenger å konvertere innenlandsk valuta til utenlandsk for å finansiere importen.
      - Måles i bevegelse per tid (flow).
    - Moderne tilnærming: Kapitalbevegelser
      - Kapitaleiere kjøper og selger valuta.
      - Måles på et gitt tidspunkt (stock).
      - Denne tilnærmingen brukes i kurset vårt.
    - Valutakursregimer:
      - Fast valutakurs: Pengeprisendringer gjennom devaluering og revaluering (statlig initierte prisendringer). Valutareservene er endogen variabel.
      - Flytende valutakurs: Pengeprisendringer gjennom depresiering og appresiering (markedsinitierte prisendringer). Kursen er endogen variabel.
  - Tilbud og etterspørsel i valutamarkedet: Desto høyere pris på $, desto større er tilbudet fra innenlandsk privat sektor og utenlandsk sektor rettet mot sentralbanken. Sentralbanken kjøper og selger (kalles intervensjoner) en bestemt

mengde \$. Differansen mellom statens utenlandsreserver og utenlandsgjeld betegnes som Q.

- En enkel porteføljemodell:
  - Sektorer (aktører):
    - Offentlig sektor (mulig prissetter)
    - Private innenlandsk sektor (pristaker)
    - Utenlandsk sektor (pristaker)
  - Aktiva:
    - Innenlandske obligasjoner (kroneobligasjoner)
    - Utenlandske obligasjoner (dollarobligasjoner)
  - Finansielle nettobeholdninger (beholdning minus gjeld) av kroner B_i og dollar F_i for sektor i ($i = g, p, *$), der finansformuen summerer seg til 0:

Beholdning	Sektor			
	Staten	Private	Utenlandske	Sum
Kronebeholdning	B_g	B_p	B_*	0
Dollarbeholdning	F_g	F_p	F_*	0
Sum i kroner	$B_g + EF_g$	$B_p + EF_p$	$B_* + EF_*$	0

  - Sektorenes realformue W_i målt i egen valuta: Til gitt kurs må initialformuen være lik endelig beholdning: $B_i + EF_i = B_{i0} + EF_{i0}$

(1) Offentlig sektor: $$W_g = \frac{B_{g0} + EF_{g0}}{P}$$

(2) Privat sektor: $$W_p = \frac{B_{p0} + EF_{p0}}{P}$$

(3) Utenlandsk sektor: $$W_* = \frac{\frac{B_{*0}}{E} + F_{*0}}{P_*}$$

  - Summen av realformuene målt i NOK: $W_g + W_p + \frac{EP_*}{P} W_* = 0$. Realformuen til en sektor kan endres gjennom:
    - Sparing, det vil si investering i finansielle aktiva.
    - Endringer i valutakursen.
  - Summen av utenlandsbeholdningene: $F_g + F_p + F_* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_g = -F_p - F_*$
  - Realavkastning av formuesbeholdninger: Kroner i og dollar $i_* + e$
    - Risikopremien med udekket renteparitet: $r = i - i_* - e_e = 0$
    - Ikke nødvendigvis udekket renteparitet på grunn av:
      (1) Valutakursrisiko og risikoaversjon
      (2) Forskjellige forventninger til realavkastningen
      (3) Transaksjonskostnader og likviditet
      (4) Valutakontroll/offentlige reguleringer

- Innenlandsk privat sektors etterspørsel etter valuta:
  (1) Etterspørselen etter dollar:
  $\frac{EF_p}{P} = f(r, W_p)$ der $f_r < 0$ og $0 < f_W < 1$
  (2) Etterspørselen etter kroner:
  $\frac{B_p}{P} = W_p - f(r, W_p)$
- Utenlandsk sektors etterspørsel etter valuta:
  (1) Etterspørselen etter kroner:
  $\frac{B_*}{EP_*} = b(r, W_*)$ der $b_r > 0$ og $0 < b_W < 1$
  (2) Etterspørselen etter dollar:
  $\frac{F_*}{P_*} = W_* - b(r, W_*)$
- Modellen:
  (1) $W_p = \frac{B_{p0} + EF_{p0}}{P}$
  (2) $W_* = \frac{\frac{B_{*0}}{E} + F_{*0}}{P_*}$
  (3) $r = i - i_* - e_e$
  (4) $e_e = e_e(E)$ der $e_e' < 0$
  (5) $\frac{EF_p}{P} = f(r, W_p)$ der $f_r < 0,\ 0 < f_W < 1$
  (6) $\frac{F_*}{P_*} = W_* - b(r, W_*)$ der $b_r > 0,\ 0 < b_W < 1$
  (7) $F_g + F_p + F_* = 0$

- Løsning av modellen: Bruker syv likninger til å determinere syv endogene variable W_p, W_*, F_p, F_*, r, e_e og (hvis flytende valutakurs) E / (hvis fast valutakurs) F_g:
  $F_g = -F_p - F_* = -\frac{P}{E} f(r, W_p) - P_*[W_* - b(r, W_*)] =$
  $-\frac{P}{E} f\left(i - i_* - e_e(E), \frac{B_{p0} + EF_{p0}}{P}\right) - P_*\left[\frac{\frac{B_{*0}}{E} + F_{*0}}{P_*} - b\left(i - i_* - e_e(E), \frac{\frac{B_{*0}}{E} + F_{*0}}{P_*}\right)\right]$
- Helning på tilbudskurven:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_g}{\partial E}
&= \left[\frac{P}{E^2}\frac{EF_p}{P} - \frac{P}{E}\left(f_r(-e_e^{'}) + f_W\frac{F_{p0}}{P}\right)\right] \\
&\quad - P_*\left[\left(-\frac{B_{*0}}{P_*}\frac{1}{E^2}\right) - \left(b_r(-e_e^{'}) + b_W\left(-\frac{B_{*0}}{P_*}\frac{1}{E^2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{F_p}{E} + \frac{P}{E}f_r e_e^{'} - f_W\frac{F_{p0}}{E} + \frac{B_{*0}}{E^2} - P_* b_r e_e^{'} - b_W\frac{B_{*0}}{E^2} \\
&= (1-f_W)\frac{F_{p0}}{E} + (1-b_W)\frac{B_{*0}}{E^2} + \frac{P}{E}f_r e_e^{'} - P_* b_r e_e^{'} \\
&= \frac{P}{E^2}\left((1-f_W)\frac{EF_{p0}}{P} + (1-b_W)\frac{B_{*0}}{P}\right) + \frac{P}{E}\left(f_r - \frac{EP_*}{P}b_r\right)e_e^{'} \\
&= \frac{P}{E^2}\gamma - \frac{P}{E}ke_e^{'} > 0
\end{aligned}
$$

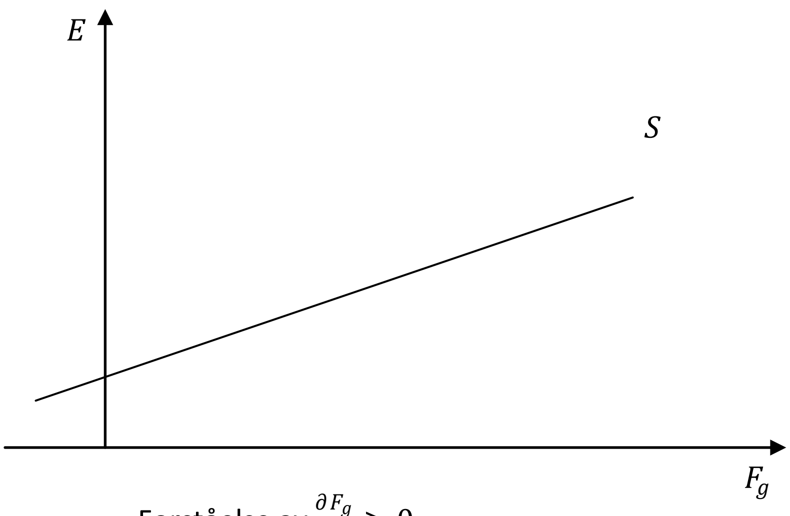
der

$$\gamma = (1-f_W)\frac{EF_{p0}}{P} + (1-b_W)\frac{B_{*0}}{P} > 0$$

$$k = -\left(f_r - \frac{EP_*}{P}b_r\right) > 0$$

Tilstrekkelige betingelser for at $\frac{\partial F_g}{\partial E} > 0$:

1. $F_{p0} > 0$
2. $0 < f_W < 1$
3. $B_{*0} > 0$
4. $0 < b_W < 1$ (1)-(4) gir $\gamma > 0$
5. $f_r < 0$
6. $b_r > 0$ (5)-(6) gir $k > 0$
7. $e_e^{'} < 0$



- Forståelse av $\frac{\partial F_g}{\partial E} > 0$:

        - Antar gitt total pengebeholdning i innenlandsk valuta, fordelt mellom sektorene.
        - Desto mer myndighetene holder av innenlandsk valuta (og dermed mindre av utenlandsk valuta), desto mindre er det igjen til andre aktører i markedet, og desto dyrere blir innenlandsk valuta i forhold til utenlandsk valuta.
- Dekomponering av effekter:
    - Porteføljesammensetningseffekten: $\gamma = (1 - f_W)\frac{EF_{p0}}{P} + (1 - b_W)\frac{B_{*0}}{P} > 0$
        - $E\uparrow$

          $\Rightarrow$ $(EF_{p0})\uparrow$

          $\Rightarrow$ $W_p\uparrow$

          $\Rightarrow$ $B_p\uparrow$ og $F_p\downarrow$

          Privat sektor selger noe utenlandske obligasjoner for å omfordele den økte formuen

          $\Rightarrow$ Tilbudet rettet mot sentralbanken øker
        - Forståelse: Depresiering av NOK gir relativ prisøkning på \$. Dette endrer formuesfordelingen mellom sektorene, og verdifordelingen i hver sektor. Resultatet er at den enkelte sektor rebalanserer porteføljen.
    - Forventningseffekten: $-ke_e^{'} = \left(f_r - \frac{EP_*}{P}b_r\right)e_e^{'} > 0$
        - $E\uparrow$

          $\Rightarrow$ $e_e\downarrow$

          $\Rightarrow$ $r\uparrow$

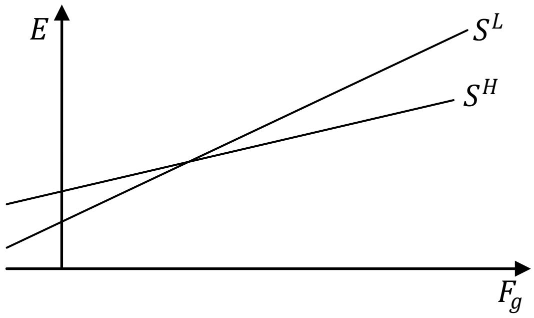
          $\Rightarrow$ $B_p\uparrow$ og $F_p\downarrow$

          Mer attraktivt med innenlandske obligasjoner siden $f_r < 0$ og $b_r > 0$

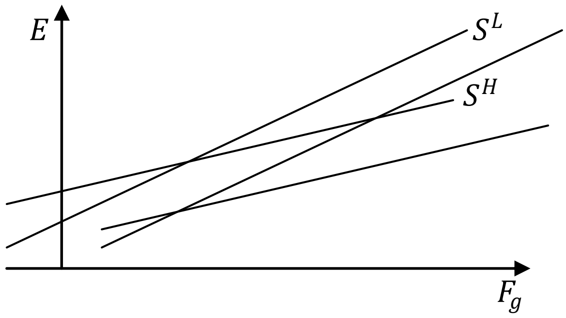
          $\Rightarrow$ Tilbudet rettet mot sentralbanken øker
        - Forståelse: Depresiering av NOK endrer forventningene om fremtidig depresiering. Dermed endres også risikopremien på NOK. Resultatet er at den enkelte sektor skifter etterspørselen etter \$.
        - Merk at forventningseffektens retning avhenger av fortegnet på $e_e^{'}$:
            - Regressive forventninger: $e_e^{'} < 0$
            - Ekstrapolative forventninger: $e_e^{'} > 0$
            - Konstante forventninger: $e_e^{'} = 0$
- Kapitalmobilitet:
    - $k = -\left(f_r - \frac{EP_*}{P}b_r\right)$

      Størrelsen bestemmes av hvor følsomme innenlandske og utenlandske investorer er for risikopremien på NOK. Desto mer negativ f_r og desto mer positiv b_r, desto større kapitalmobilitet k.
    - Problemstilling: Hvordan påvirker k tilbudskurven?

- Fra $\frac{\partial F_g}{\partial E} = \frac{P}{E^2}\gamma - \frac{P}{E}ke_e'$ ser vi følgende: $k\uparrow \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_g}{\partial E}\uparrow$
- Forståelse: Økt kapitalmobilitet gjør F_g mer følsom for endringer i E. Grafisk ser vi dette som at tilbudskurven blir slakere:



- Problemstilling: Hvordan påvirker kapitalmobiliteten valutamarkedet?
  - Case Valutaintervensjon under flytende valutakurs:
    - Valutaintervensjon: SB kjøper dollar slik at $F_{g0} < F_{g1}$.
    - Intuisjon: $F_g\uparrow \quad \Rightarrow \quad E\uparrow \quad \Rightarrow \quad e_e\downarrow \quad \Rightarrow \quad r\uparrow$
    - Effekten av $r\uparrow$ er stor når kapitalmobiliteten er høy. Det vil si at selv en liten økning i r gjør at privat og utenlandsk sektor ønsker å bytte bort mye dollar for kroner.
  - Case: Endring i risikopremien r under flytende valutakurs:
    - Har tidligere vist at økt r medfører at tilbudskurven skifter utover:



    - Høy kapitalmobilitet innebærer:
      - Slakere tilbudskurve
      - Større skift i tilbudskurven til gitt økning i risikopremien
    - Vanskelig å avgjøre grafisk hvorvidt høy kapitalmobilitet gir størst endring i E, må avgjøres analytisk ved hjelp av at $F_g + F_p + F_* = 0$:

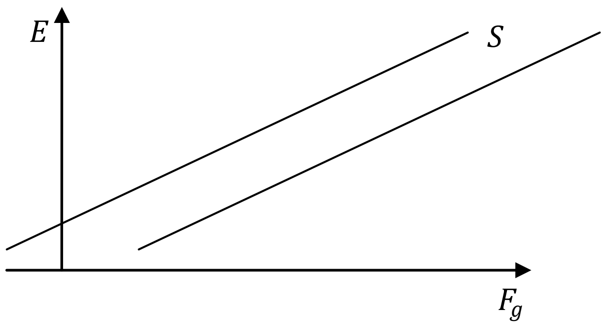
$$F_g = -F_p - F_* = -\frac{P}{E} f(r, W_p) - P_*[W_* - b(r, W_*)]$$
$$= -\frac{P}{E} f\left(i - i_* - e_e(E), \frac{B_{p0} + EF_{p0}}{P}\right)$$
$$- P_*\left[\frac{\frac{B_{*0}}{E} + F_{*0}}{P_*} - b\left(i - i_* - e_e(E), \frac{\frac{B_{*0}}{E} + F_{*0}}{P_*}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial F_g}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial i} + \frac{\partial F_g}{\partial i}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial i} = -\frac{\frac{\partial F_g}{\partial i}}{\frac{\partial F_g}{\partial E}}$$

- Har tidligere funnet at:
  $$\frac{\partial F_g}{\partial E} = \frac{P}{E^2}\gamma - \frac{P}{E}ke_e'$$
- Utregning gir at:
  $$\frac{\partial F_g}{\partial i} = -\frac{P}{E}f_r + P_* b_r = -\frac{P}{E}\left(f_r - \frac{EP_*}{P}b_r\right) = \frac{P}{E}k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial i} = -\frac{\frac{\partial F_g}{\partial i}}{\frac{\partial F_g}{\partial E}} = -\frac{\frac{P}{E}k}{\frac{P}{E^2}\gamma - \frac{P}{E}ke_e'} = -\frac{k}{\frac{\gamma}{E} - ke_e'} = -\frac{1}{\frac{\gamma}{Ek} - e_e'} < 0$$

Ser at $k\uparrow$ gir sterkere negativ effekt av i på E.

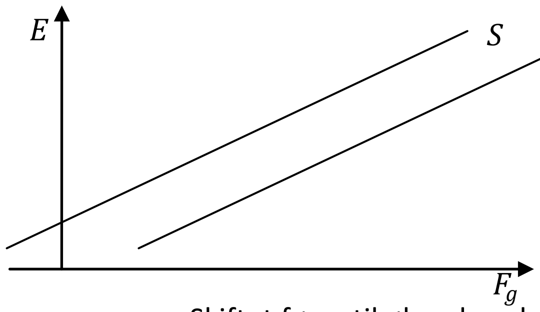
- Case: Endring av risikopremien r under fast kurs
  - Som før innebærer for eksempel økt i at tilbudet av dollar mot SB øker: $i\uparrow \quad \Rightarrow \quad F_g\uparrow$
  - Gir skift utover i tilbudskurven:



  - Skiftet er større desto større kapitalmobilitet fordi $\frac{\partial F_g}{\partial i} = \frac{P}{E}k$. Dette innebærer at høy kapitalmobilitet gjør det vanskelig med en selvstendig pengepolitikk.
- Case: Forventninger om en devaluering ved fast kurs ($e_e\uparrow$)
  - Slike forventninger innebærer at:
    $e_e\uparrow \quad \Rightarrow \quad r\downarrow \quad \Rightarrow$ Verdien av NOK svekkes mot dollar
    $\Rightarrow$ Redusert tilbud av utenlandsk valuta
    $\Rightarrow$ Tilbudskurven skifter innover

        - Viktig: Myndighetene kan svare med å sette opp i slik at tilbudskurven skifter utover igjen. Det er imidlertid vanskeligere å nøytralisere devalueringsforventningene når kapitalmobiliteten er høy, siden dette innebærer store kontraksjoner i tilbudet. Nøytralisering krever da tilsvarende store renteøkninger.
- Avvik fra udekket renteparitet: $r = i - i_* - e_e = 0$
    - Case 1: $i\uparrow$
        - Private og utland ønsker å plassere formuene i NOK.
        - Sentralbanken for dermed økte valutareserver, og låner i NOK.
        - Problem: Sentralbanken låner i valuta med høy rente og plasserer i valuta med lav rente.
    - Case 2: $i\downarrow$
        - Private og utland ønsker å plassere formuene i \$.
        - Sentralbanken for dermed økte valutareserver, og låner i \$.
        - Problem: Sentralbanken låner i valuta med høy rente og plasserer i valuta med lav rente.
    - Case 3: $e_e\uparrow$
        - Private og utland ønsker å plassere formuene i \$.
        - Sentralbanken for dermed økte valutareserver, og låner i \$.
        - Men: Hvis sentralbanken makter å holde E fast får denne en gevinst; har da lånt i valuta med lav rente og plassert i valuta med høy rente. Tilsvarende tap for private og utlandet.
- Ubalanser i utenriksøkonomien og offentlige budsjetter:
    - På litt lengre sikt kan finansformuene påvirkes av andre forhold enn valutakursen.
    - Stigende overskudd i utenriksøkonomien gir $W_*\downarrow$, $W_p\uparrow$ og/eller $W_g\uparrow$.
    - Stigende offentlig budsjettunderskudd gir $W_g\downarrow$, $W_p\uparrow$ og/eller $W_*\uparrow$.
    - Case: Økt overskudd D i utenriksøkonomien samtidig som budsjettet D_g er balansert.
        - Gir $W_*\downarrow$, $W_p\uparrow$ og $dW_g = 0$ der $dW_p = -\frac{EP_*}{P}dW_*$.
          Tar utgangspunkt i initiallikevekten $F_g = -\frac{P}{E}f(r, W_p) - P_*[W_* - b(r, W_*)]$ i valutamarkedet og differensierer denne:
          $$dF_g = -\frac{P}{E}f_W dW_p - P_*(dW_* - b_W dW_*)$$
          $$= -\frac{P}{E}f_W\left(-\frac{EP_*}{P}\right)dW_* - P_*(1 - b_W)dW_*$$
          $$= f_W P_* dW_* - P_*(1 - b_W)dW_* == [f_W - (1 - b_W)]P_* dW_*$$
        - Forståelse:
          $dF_g > 0$ kun hvis $f_W < 1 - b_W$
          $\Rightarrow \quad b_W < 1 - f_W$
            - b_W: Andelen av utenlandsk formue som plasseres i NOK.

- $1 - f_W$: Andelen av privat formue som plasseres i NOK.
- Antar at $b_W < 1 - f_W$. Dette gir skift utover i tilbudskurven:



- Skiftet fører til økende valutareserver over tid ved fast kurs og gradvis appresiering over tid ved flytende kurs.

1B. Porteføljetilpasning (Rødseth kap. 2)

- Risiko: Usikkerhet knyttet til depresiering og inflasjon.
- Investorers nyttefunksjon: $U = E(\pi) - \frac{1}{2}R * var(\pi)$
- Budsjettbetingelsen til innenlandsk investor: $\frac{B+EF}{P} = \frac{B_0+EF_0}{P} = W$
- Andelen av aktiva i utlandet f: $f = \frac{EF}{PW}$

  $\Rightarrow$ Utenlandsk valuta etterspurt: $F = \frac{fPW}{E}$
- Andelen aktiva i hjemlandet $(1-f)$: $(1-f) = \frac{B}{PW}$

  $\Rightarrow$ Innenlandsk valuta etterspurt: $B = (1-f)PW$
- Avkastning: $\pi = (1-f)(i-p) + f(i_* + e - p) = (1-f)i + f(i_* + e) - p$
  - Inflasjonsraten p: $p = \frac{\dot{P}}{P}$
  - Depresieringsraten e: $e = \frac{\dot{E}}{E}$
- Forventet avkastning: $E(\pi) = (1-f)i + f(i_* + \mu_e) - \mu_p$
- Avkastningsspredning: $var(\pi) = f^2\sigma_{ee} + \sigma_{pp} - 2f\sigma_{ep}$
- Investorens nyttemaksimering:

$$U = E(\pi) - \frac{1}{2}R * var(\pi) = \left[(1-f)i + f(i_* + \mu_e) - \mu_p\right] - \frac{1}{2}R\left[f^2\sigma_{ee} + \sigma_{pp} - 2f\sigma_{ep}\right]$$

Førsteordensbetingelsen:

$$\frac{dU}{df} = \frac{dE(\pi)}{df} - \frac{1}{2}R\frac{dvar(\pi)}{df} = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{dU}{df} = -i + i_* + \mu_e - \frac{1}{2}R\left(2f\sigma_{ee} - 2\sigma_{ep}\right) = 0$

$\Rightarrow$ $-i + i_* + \mu_e - Rf\sigma_{ee} + R\sigma_{ep} = 0$

$\Rightarrow$ $Rf\sigma_{ee} = -i + i_* + \mu_e + R\sigma_{ep}$

$\Rightarrow$ $f = \frac{-i+i_*+\mu_e+R\sigma_{ep}}{R\sigma_{ee}} = \frac{\sigma_{ep}}{\sigma_{ee}} + \frac{-i+i_*+\mu_e}{R\sigma_{ee}} = \frac{\sigma_{ep}}{\sigma_{ee}} - \frac{r}{R\sigma_{ee}} = f_m + f_s$

- Minimumvariansporteføljen: $f_m = \frac{\sigma_{ep}}{\sigma_{ee}}$
  - Realavkastningen på begge valutaene er usikre, så investoren har ikke noe risikofritt investeringsalternativ.
  - Vanlig antagelse: Positiv korrelasjon mellom innenlandsk inflasjon og depresiering: $\sigma_{ep} > 0$. Plassering i dollar gir dermed beskyttelse mot innenlandsk inflasjon.
  - Uttrykket i ord: Desto større korrelasjon mellom innenlandsk inflasjon og depresiering i forhold til usikkerheten i valutakursen, desto større andel av formuen burde plasseres i utenlandsk valuta (hedging) når investoren ønsker å minimere risikoen. Hvis valutakursen er totalt ukorrelert med innenlandsk inflasjon ($\sigma_{ep} = 0$) øker bare risikoen ved å plassere i utenlandsk valuta; da er det ikke mulig å hedge mot innenlandsk inflasjon ved å plassere i dollar.
- Spekulativ portefølje: $f_s = -\frac{r}{R\sigma_{ee}}$
  - Desto større risikopremien på kroner er i forhold til risikoaversjonen og svingningene i valutakursen, desto mindre andel av formuen burde plasseres i dollar.
  - Høy risikoaversjon og høy valutakursrisiko innebærer dermed lav kapitalmobilitet.
  - Perfekt kapitalmobilitet når det ikke er noen valutakursrisiko ($\sigma_{ee} = 0$) eller når agenten er risikonøytral ($R = 0$).

- Etterspørsel etter valuta i innenlandsk privat sektor:
  - Etterspørsel etter utenlandsk valuta: $F_p = f\frac{PW_p}{E} = \left(\frac{\sigma_{ep}}{\sigma_{ee}} - \frac{r}{R\sigma_{ee}}\right)\frac{PW_p}{E}$
  - Etterspørsel etter innenlandsk valuta: $B_p = (1-f)\frac{PW_p}{E} = \left[1 - \left(\frac{\sigma_{ep}}{\sigma_{ee}} - \frac{r}{R\sigma_{ee}}\right)\right]\frac{PW_p}{E}$

1C. Porteføljemodell med penger (Rødseth kap. 3)

- Finansiell balanse:

	Sektor			
Beholdning	Privat	Offentlig	Utenlandsk	Sum
Penger (NOK)	M	$-M$	0	0
Obligasjoner (NOK)	B	$-B$	0	0
Obligasjoner (\$)	F_p	F_g	F_*	0
Netto finansformue	$M + B + EF_p$	$-M - B + EF_g$	EF_*	0

  - Antagelser: Utenlandsk sektor holder kun dollarobligasjoner, og innenlandske sektorer holder ikke utenlandske penger.
- Modellen:

(1) $\frac{M+B+EF_p}{P} = \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P} = W_p$

(2) $\frac{-M-B+EF_g}{P} = \frac{-M_0-B_0+EF_{g0}}{P} = W_g$

(3) $\frac{F_*}{P_*} = \frac{F_{*0}}{P_*} = W_*$

(4) $r = i - i_* - e_e$

(5) $e_e = e_e(E)$ der $e_e^{'} < 0$

(6) $\frac{M}{P} = m(i, Y)$ der $m_i < 0$ og $m_Y > 0$

(7) $\frac{EF_p}{P} = f(r, W_p)$ der $f_r < 0$ og $0 < f_W < 1$

(8) $\frac{B}{P} = W_p - f(r, W_p) - m(i, Y)$

(9) $F_p + F_g + F_* = 0$

- 2 priser:
  - Innenlandske markeder: i
  - Valutamarkedet: E
- Determinering:
  - Endogene variabler: $W_p, W_g, W_*, F_*, F_p, r, e_e$
  - Eksogene variabler: i_*, Y, P, P_*
  - Predeterminerte variabler: $M_0, B_0, F_{p0}, F_{g0}, F_{*0}$
  - Gjenstående variabler, hvorav to eksogene og tre endogene: M, B, F_g, i, E Determineringen av disse avhenger av det politiske regimet.
- Politiske regimer:

Regime		Eksogene variabler		Endogene variabler		
Fast valutakurs						
1	Fast rentenivå	E	i	F_g	M	B
2	Ingen sterilisering	E	B	F_g	M	i
3	Full sterilisering	E	M	F_g	B	i
Flytende valutakurs						
4	Fast rentenivå	F_g	i	E	M	B
5	Ingen sterilisering	F_g	B	E	M	i
6	Full sterilisering	F_g	M	E	B	i

- Sterilisering:
  - Med sterilisering menes at sentralbanken gjennomfører markedsoperasjoner for å unngå at kapitalbevegelser påvirker pengemengden.
  - Budsjettbetingelsen for offentlig sektor (2): $\frac{-M-B+EF_g}{P} = \frac{-M_0-B_0+EF_{g0}}{P} = W_g$

    $\Rightarrow \quad -M - B + EF_g = -M_0 - B_0 + EF_{g0}$

$\Rightarrow \qquad (M - M_0) = E\big(F_g - F_{g0}\big) - (B - B_0)$

$\Rightarrow \qquad dM = EdF_g - dB$

- Ved full sterilisering endrer sentralbanken beholdningen av obligasjoner slik at pengemengden M holdes konstant: $EdF_g = dB \quad \Rightarrow \quad dM = 0$
- Ved ingen sterilisering verken kjøper eller selger sentralbanken innenlandske obligasjoner: $dB = 0 \quad \Rightarrow \quad EdF_g = dM$

- Obligasjonsmarkedet:

Tar utgangspunkt i (8): $\frac{B}{P} = W_p - f\big(r, W_p\big) - m(i, Y)$

Setter (5) inn i (4), og deretter (1) og (4) inn i (8):

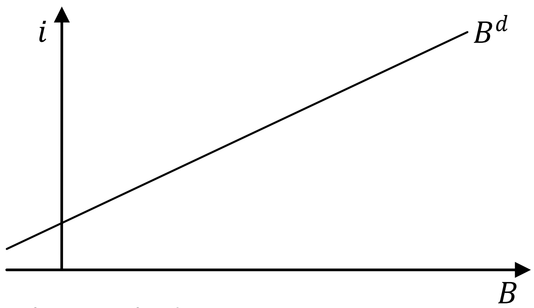
$$\frac{B}{P} = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right] - m(i, Y)$$

Sammenhengen mellom obligasjonsetterspørselen og innenlandsk rentenivå:

$$\frac{1}{P}\frac{dB}{di} = -f_r - m_i$$

$\Rightarrow \qquad \frac{dB}{di} = -P(f_r + m_i) > 0$

$\Rightarrow \qquad$ Positiv sammenheng, ergo stigende etterspørselskurve:



- Valutamarkedet:

Tar utgangspunkt i (9): $F_p + F_g + F_* = 0$

Gjør om og setter inn for (3) og (7):

$$F_g = -F_* - F_p = -F_{*0} - \frac{P}{E} f\big(r, W_p\big)$$

Setter (5) inn i (4), og setter inn for (1) og (4) i (9):

$$F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E} f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right]$$

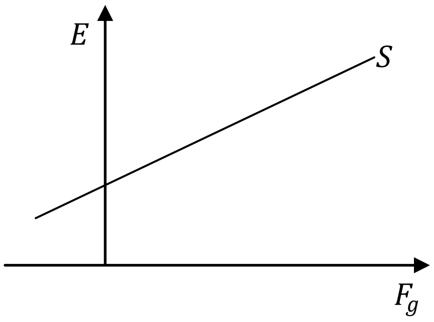
Sammenhengen mellom tilbudet av utenlandsk valuta og valutakursen:

$$\frac{\partial F_g}{\partial E} = \frac{P}{E^2} f\big(r, W_p\big) - \frac{P}{E}\left(f_r(-e_e') + f_W \frac{F_{p0}}{P}\right) = \frac{P}{E^2}\frac{EF_p}{P} + \frac{P}{E} f_r e_e' - \frac{P}{E} f_W \frac{F_{p0}}{P}$$
$$= \frac{F_{p0}}{E} + \frac{P}{E} f_r e_e' - f_W \frac{F_{p0}}{E} = \frac{F_{p0}}{E}(1 - f_W) + \frac{P}{E} f_r e_e' > 0$$

$\Rightarrow \qquad$ Positiv sammenheng, ergo stigende etterspørselskurve:

Som tidligere har vi to effekter:

1. Porteføljesammensetningseffekten: $\frac{F_{p0}}{E}(1 - f_W)$
2. Forventningseffekten: $\frac{P}{E} f_r e_e'$



- Pengemarkedet:

  Tar utgangspunkt i (6): $\frac{M}{P} = m(i, Y)$

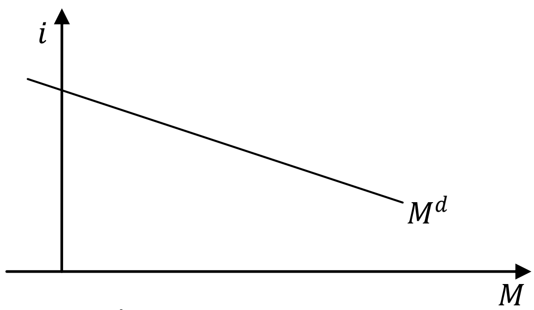
  Gjør om:

  $M = Pm(i, Y)$

  Sammenhengen mellom pengeetterspørselen og innenlandsk rentenivå:

  $$\frac{\partial M}{\partial i} = Pm_i < 0$$

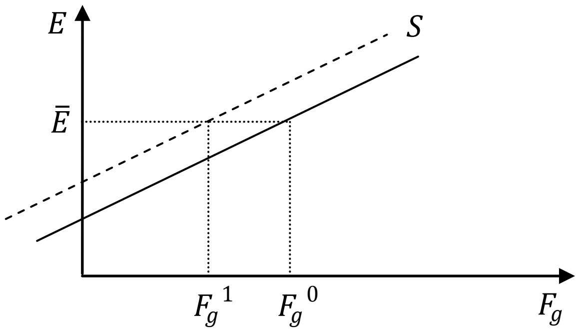
  $\Rightarrow$ Negativ sammenheng, ergo fallende etterspørselskurve:



- Fastsettelse av priser:
  - To priser i og E.
  - Rentebestemmelsen:
    - I regime 3 og 6 (full sterilisering) har vi én likning (6) til å bestemme i:
      $$\frac{M}{P} = m(i, Y)$$
    - I regime 2 (ingen sterilisering) har vi én likning (8) til å bestemme i:
      $$\frac{B}{P} = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right] - m(i, Y)$$
  - Valutakursbestemmelsen:
    - Rentenivået i er allerede bestemt i penge-/obligasjonsmarkedet. Dermed har vi én likning (9) til å bestemme E (hvis flytende kurs), eventuelt F_g (hvis fast kurs):
      $$F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E} f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right]$$
- Case: Utenlandsk rentesjokk $di_* > 0$
  - Regime 1: Fast kurs og rentestyring

    Valutamarkedet: $F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E} f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}\right]$

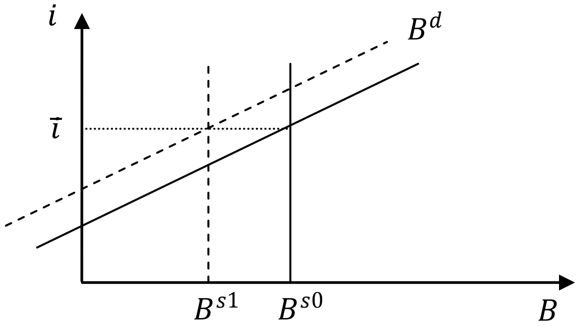
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F_g}{\partial i_*} = -\frac{P}{E} f_r(-1) = \frac{P}{E} f_r < 0$$



Obligasjonsmarkedet: $\frac{B}{P} = \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}\right] - m(i,Y)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial B}{P \partial i_*} = -f_r(-1) = f_r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial i_*} = P f_r < 0$$



Konklusjon:

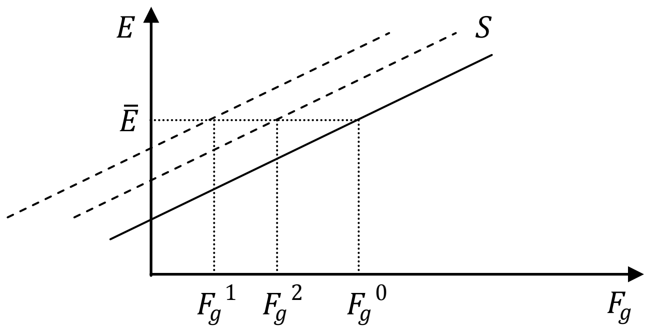
$di_* > 0 \quad \Rightarrow \quad dr < 0 \quad \Rightarrow \quad dB < 0$ og $dF_g < 0$

$dM = EdF_g - dB \quad \Rightarrow \quad dM = 0$

- Regime 2: Fast kurs og ingen sterilisering

  Valutamarkedet: $F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E} f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}\right]$

$$\Rightarrow \quad dF_g = -\frac{P}{E} f_r \left(\frac{di}{di_*} - 1\right) = -\frac{P}{E} f_r \left(\frac{f_r}{f_r+m_i} - 1\right) = -\frac{P}{E} f_r \left(\frac{f_r - f_r - m_i}{f_r+m_i}\right) = -\frac{P}{E} f_r \left(-\frac{m_i}{f_r+m_i}\right) = \frac{P}{E} f_r \frac{m_i}{f_r+m_i} < 0$$

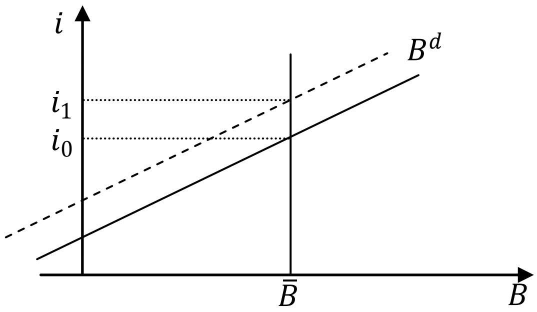


I likhet med regime 1 reduseres tilbudet av valuta når $di_* > 0$. Reduksjonen motsvares imidlertid delvis av at $di > 0$, slik at risikopremien ikke reduseres like mye som i regime 1.

Obligasjonsmarkedet: $\frac{B}{P} = \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}\right] - m(i,Y)$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial B}{P\partial i_*} = -f_r(-1) = f_r$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial i_*} = Pf_r < 0$



$di_* > 0 \qquad \Rightarrow \qquad di > 0 \qquad$ der:

$$\frac{B}{P} = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right] - m(i,Y)$$

$\Rightarrow \quad 0 = -f_r(di - di_*) - m_i di = -di(f_r + m_i) + f_r di_*$

$\Rightarrow \quad di(f_r + m_i) = f_r di_*$

$\Rightarrow \quad 0 < \frac{di}{di_*} = \frac{f_r}{f_r + m_i} < 1$

Økt rente innenlands gir redusert pengemengde siden $m_i < 0$.

Konklusjon:

$di_* > 0 \quad \Rightarrow \quad di_* > di > 0 \quad \Rightarrow \quad dr < 0 \quad \Rightarrow \quad dB = 0$ og $dF_g < 0$

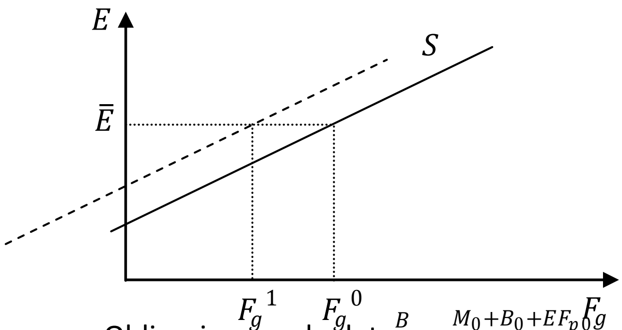
$dM = EdF_g - dB \quad \Rightarrow \quad dM < 0$

- Regime 3: Fast kurs og full sterilisering

  Valutamarkedet:

$F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E} f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}\right]$

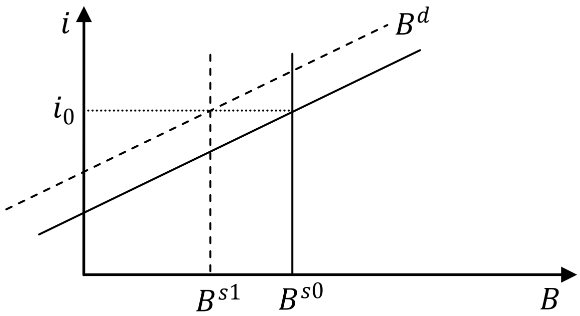
$\Rightarrow \quad \frac{\partial F_g}{\partial i_*} = -\frac{P}{E} f_r(-1) = \frac{P}{E} f_r < 0$



Obligasjonsmarkedet: $\frac{B}{P} = \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}\right] - m(i,Y)$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial B}{P\partial i_*} = -f_r(-1) = f_r$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial i_*} = Pf_r < 0$



I regimet med full sterilisering må innenlandsk rente holdes konstant for at ikke pengemarkedet skal påvirkes.

Konklusjon:

$di_* > 0 \quad \Rightarrow \quad dr < 0 \quad \Rightarrow \quad dB < 0$ og $dF_g < 0$

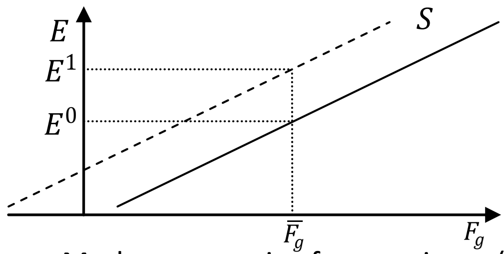
$dM = EdF_g - dB \quad \Rightarrow \quad dM = 0$

- Regime 4: Flytende kurs og rentestyring

  4.A: Valutamarkedet:

$$F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E} f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right]$$

$di_* > 0 \quad \Rightarrow \quad dr < 0 \quad \Rightarrow \quad dE > 0$



Merk at regressive forventninger ($e_e' < 0$) med fører at $dE > 0$ isolert sett gir $dr > 0$. Regressive forventninger fungerer dermed som naturlig stabilisator.

Pengemarkedet og obligasjonsmarkedet

$\frac{M}{P} = m(i, Y)$ og

$$\frac{B}{P} = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right] - m(i, Y)$$

Rentestyring innebærer at $di = 0$. Dermed er også $dM = 0$

4.C: Konklusjon

$di_* > 0 \quad \Rightarrow \quad dr < 0 \quad \Rightarrow \quad dE > 0, dF_g = 0$ og $dM = 0$

$dM = EdF_g - dB \quad \Rightarrow \quad dB = 0$

- Regime 5: Flytende kurs og ingen sterilisering

  Valutamarkedet

$$F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E} f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right]$$

$di_* > 0 \quad \Rightarrow \quad dr < 0 \quad \Rightarrow \quad dE > 0$

Pengemarkedet:

$$\frac{M}{P} = m(i, Y)$$

Verken valutakursen eller utenlandsk rentenivå påvirker pengemarkedet.
Konklusjon

$di_* > 0 \quad \Rightarrow \quad dr < 0 \Rightarrow \quad dE > 0, dF_g = 0$ og $dM = 0$

$dM = EdF_g - dB \quad \Rightarrow \quad dB = 0$

- Regime 6: Flytende kurs og full sterilisering
  Identisk med regime 5. Grunnen er at $dM = EdF_g - dB$ og $F_g = 0$ gir $dM = -dB$
  Siden $dM = 0$ er også $dB = 0$

- Case: Ekspansiv pengepolitikk $dM > 0$ (ingen sterilisering) eller $dB > 0$ (full sterilisering) der ekspansiv pengepolitikk innebærer at målet er å få aktørene til å absorbere den økte pengemengden.
  - Regime 1: Fast kurs og rentestyring
    - Fast rente gjør det ikke mulig å drive pengepolitikk ved hjelp av renteinstrumentet.
  - Regime 2: Fast kurs og ingen sterilisering
    Differensierer (8) med hensyn på i:

$$\frac{B}{P} = \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}\right] - m(i,Y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dB}{di} = -f_r - m_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dB}{di} = P(-f_r - m_i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{dB} = -\frac{1}{Pf_r+Pm_i} > 0$$

$\Rightarrow$ Sentralbankens kjøp av obligasjoner presser renta nedover.

Redusert rentenivå fører til økt etterspørsel etter penger. Ved ingen sterilisering medfører dette noe økt rentenivå igjen. Dermed er ikke økningen i pengemengden like stor som reduksjonen i obligasjonsmengden. Analytisk:

$$\frac{1}{P}dM = m_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dM}{dB} = m_i\frac{di}{dB} = -m_i\frac{1}{Pf_r+Pm_i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dM}{dB} = -P\frac{m_i}{Pf_r+Pm_i} = -\frac{m_i}{f_r+m_i}$$

der $0 > \frac{dM}{dB} > -1$

Siden rentenivået innenlands totalt sett reduseres får vi også utslag i valutamarkedet (9). Her får vi en reduksjon i sentralbankens utenlandsreserver som følge av obligasjonskjøpet innenlands:

$$F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E}f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dF_g}{dB} = -\frac{P}{E}f_r\frac{di}{dB} = \frac{P}{E}f_r\frac{1}{Pf_r+Pm_i} = \frac{1}{E}\frac{f_r}{f_r+m_i}$$

der $0 < \frac{dF_g}{dB} < 1$

  - Regime 3: Fast kurs og full sterilisering
    Tar utgangspunkt i pengemarkedet (6):

$$\frac{M}{P} = m(i, Y)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dM}{di} = m_i$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dM}{di} = Pm_i$$
$$\Rightarrow \quad \frac{di}{dM} = \frac{1}{Pm_i} < 0$$

Ser at en ønsket pengemengdeøkning ved full sterilisering krever større rentereduksjon enn ved ingen sterilisering. Dette skyldes at man her må gjenta markedsoperasjonen for å sterilisere lekkasjen ut i valutamarkedet.

Effekten på obligasjonsmarkedet:

$$\frac{B}{P} = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P} - f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right] - m(i, Y)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dB}{dM} = \frac{dB}{di}\frac{di}{dM} = -f_r\frac{di}{dM} - m_i\frac{di}{dM} = -f_r\frac{1}{Pm_i} - m_i\frac{1}{Pm_i}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dB}{dM} = -P\left(\frac{f_r}{Pm_i} + \frac{m_i}{Pm_i}\right) = -\frac{f_r + m_i}{m_i} < -1$$

Ser også her at reduksjonen i obligasjoner må være større enn økningen i pengemengden.

Effekten på valutamarkedet:

$$F_g = -F_{*0} - \frac{P}{E}f\left[i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right]$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dF_g}{dM} = \frac{dF_g}{di}\frac{di}{dM} = -\frac{P}{E}f_r\frac{di}{dM} = -\frac{P}{E}f_r\frac{1}{Pm_i} = -\frac{1}{E}\frac{f_r}{m_i} < 0$$

Ser her at reduksjonen i sentralbankens valutareserver er større ved full sterilisering enn ved ingen sterilisering.

- Regime 4: Flytende kurs og rentestyring
  - Heller ikke her mulig med pengepolitikk ved hjelp av renteinstrumentet.
- Regime 5 og 6: Flytende kurs og ingen/full sterilisering

  Pengemarkedet (utgangspunkt i regime 6):

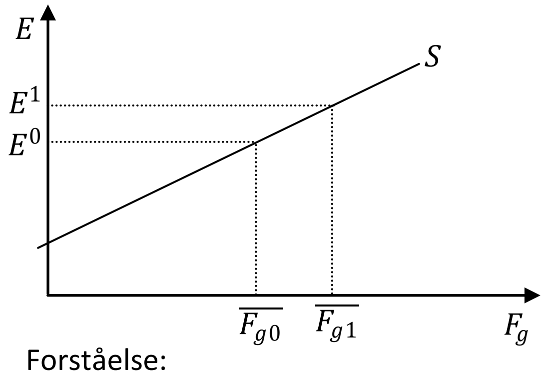
$$\frac{M}{P} = m(i, Y)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dM}{di} = m_i$$
$$\Rightarrow \quad \frac{di}{dM} = \frac{1}{Pm_i} > 0$$

  Redusert rentenivå fører til økt etterspørsel etter penger. Siden flytende kurs innebærer at $dF_g = 0$, vil $dB = -dM$. Dette innebærer at effekten av ingen sterilisering og full sterilisering er identisk.

  Redusert innenlandsk rentenivå gir også utslag i valutamarkedet (9). Med flytende kurs får vi depresiering når $dF_g = 0$, siden $\frac{dE}{di} < 0$.

- Case: Intervensjon i valutamarkedet ved flytende rente: Sentralbanken kjøper utenlandsk valuta
  - Eneste tilfellet der ingen sterilisering og full sterilisering gir ulike løsninger.
  - Full sterilisering: $EdF_g = dB, dM = 0$

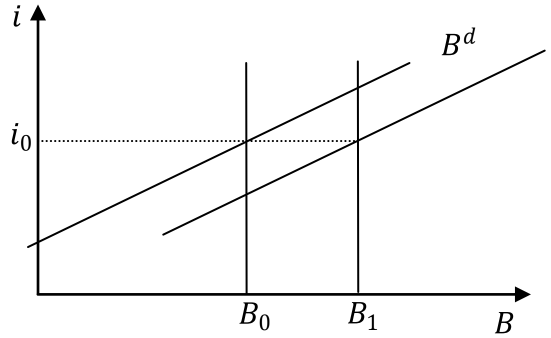
Sentralbanken kjøper valuta: $dF_g > 0$ gir $dE > 0$:



Forståelse:

(1) For at private skal være villige til å selge valuta må prisen E gå opp jf. figuren.

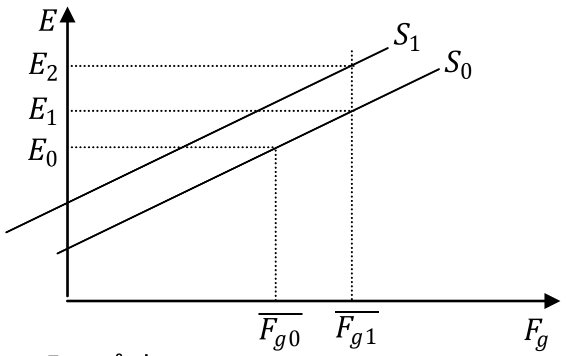
(2) Inntektene fra valutasalget gjør at private øker etterspørselen etter obligasjoner. Så lenge tilbudet endres tilsvarende, vil renta være uendret:



(3) Siden F_g og E ikke inngår i $\frac{M}{P} = m(i, Y)$, vil pengemarkedet være uendret.

(4) Konklusjonen blir altså at full sterilisering gir $dF_g = dB$.

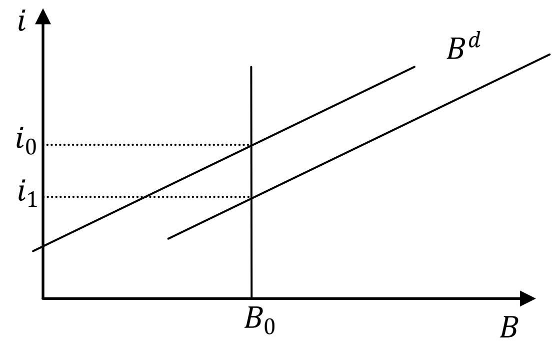
- Ingen sterilisering: $dF_g = dM$, $dB = 0$



Forståelse:

(1) For at private skal være villige til å selge valuta må prisen E gå opp fra E_0 til E_1.

(2) Inntektene fra valutasalget gjør at private øker etterspørselen etter obligasjoner. Så lenge tilbudet av obligasjoner holdes uendret vil renta reduseres:



(3) Redusert rentenivå medfører økt pengeetterspørsel slik at $dF_g = dM$.

(4) Men: Redusert rentenivå fører også til et skift innover i tilbudskurven i valutamarkedet fra S_0 til S_1. Dette gir ytterligere økning i E fra E_1 til E_2.

(5) Dette fører på nytt til økt etterspørsel etter obligasjoner, og dermed til ytterligere rentereduksjons, osv.

(6) Konklusjonen blir altså at ingen sterilisering gir $dF_g = dM$, og at vi får en konvergens mot en bestemt økning i E og reduksjon i i.

- Kapitalmobilitet:
    - Perfekt kapitalmobilitet innebærer at $|f_r| \to \infty$. Da må $r = i - i_* - e(E) = 0$.
    - Fast kurs: i og M er endogene.
        - i bestemmes i $i = i_* - e(E)$
        - M bestemmes i $\frac{M}{P} = m(i, Y)$
    - Flytende kurs: i og E er endogene.
        - i bestemmes i $\frac{M}{P} = m(i, Y)$
        - E bestemmes i $i = i_* - e(E)$
    - Problemstilling: Hvorfor er det umulig å drive selvstendig pengepolitikk når kapitalmobiliteten er perfekt? Svar: Ikke mulig fordi innenlandsk rente til enhver tid må settes slik at vi har udekket renteparitet ($r = 0$).

1D. Mundell-Flemming-Tobin-modellen (Rødseth kap. 6)

- IS-LM-modell for en liten, åpen økonomi. Kobler porteføljemodellen sammen med realøkonomien.
- Antagelser:
    - Innland og utland produserer imperfekte substitutter.
    - Priser hjemme er forhåndsdeterminert.
    - Etterspørselsdeterminert produksjon.
    - Kort sikt.
- Modellen:

(1) $Y = C\left(Y_p, W_p, \rho, \rho_*\right) + I(\rho, \rho_*) + G + X(R, Y, Y_*)$

$$0 < C_Y < 1, \quad C_W > 0, \quad C_\rho < 0, \quad C_{\rho_*} < 0,$$
$$I_\rho < 0, \quad I_{\rho_*} < 0,$$
$$X_R > 0, \quad X_Y < 0, \quad X_{Y_*} > 0$$

(2) $Y_p = Y - \rho_* \frac{EF_*}{P} - T$

(3) $W_p = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}$

(4) $\rho = i - p_e$

(5) $R = \frac{EP_*}{P}$

(6) $r = i - i_* - e_e(E)$

$e_e' < 0$

(7) $\frac{M}{P} = m(i, Y)$

$m_i < 0, \quad m_Y > 0$

(8) $\frac{B}{P} = W_p - f(r, W_p) - m(i, Y)$

(9) $\frac{EF_p}{P} = f(r, W_p)$

$f_r < 0, \quad 0 < f_W < 1, \quad F_{p0} > 0$

(10) $F_g + F_p = -F_*$

- Notasjons- og relasjonsforklaring:

(1) $Y = C(Y_p, W_p, \rho, \rho_*) + I(\rho, \rho_*) + G + X(R, Y, Y_*)$:
Nasjonalinntekten Y er lik summen av samlet konsum C, samlede investeringer I, offentlig konsum G og nettoeksporten X.

(2) $Y_p = Y - \rho_* \frac{EF_*}{P} - T$:
Privatdisponibel inntekt Y_p er lik nasjonalinntekten Y etter utenlandske gjeldsutgifter $\rho_* \frac{EF_*}{P}$ og skatten T.

(3) $W_p = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}$:
Privat formue.

(4) $\rho = i - p_e$:
Innenlandsk realrente ρ er differansen mellom nominell rente i og forventet inflasjon p_e. På samme måte er $\rho_* = i_* - p_{*e}$

(5) $R = \frac{EP_*}{P}$
Realvalutakursen R avhenger av den nominelle valutakursen og relative priser.

(6) $r = i - i_* - e_e(E)$
Risikopremien på norske kroner.

(7) $\frac{M}{P} = m(i, Y)$
Privat pengeetterspørsel.

(8) $\frac{B}{P} = W_p - f(r, W_p) - m(i, Y)$
Privat obligasjonsetterspørsel.

(9) $\frac{EF_p}{P} = f(r, W_p)$

Privat etterspørsel etter utenlandsk valuta.

(10) $F_g + F_p = -F_*$

Betingelse for total beholdning av utenlandsk valuta.

- Determinering:
  - Eksogene: $P_*,\ i_*,\ Y_*,\ \rho_*,\ G,\ T$
  - Predeterminerte: $P,\ F_*,\ M_0,\ B_0,\ F_{p0}$
  - Endogene: $Y,\ Y_p,\ R,\ r,\ W_p,\ F_p,\ \rho$
  - Gjenstående, hvorav tre endogene og to eksogene: $E,\ F_g,\ i,\ M,\ B$
  - Myndighetenes mulige politikkvirkemidler: $G,\ T,\ E,\ F_g,\ i,\ M,\ B$
- Nettoeksport:
  - $X(R, Y, Y_*) = Z_*(R, Y_*) - Z(R, Y)R = Z_*\left(\frac{EP_*}{P}, Y_*\right) - Z\left(\frac{EP_*}{P}, Y\right)\frac{EP_*}{P}$
    - Eksport: $Z_{*R} > 0,\ Z_{*Y_*} > 0$
    - Import: $Z_R < 0,\ Z_Y > 0$
  - Effekten av endret realvalutakurs på nettoeksporten:

    $$X_R \equiv \frac{dX}{dR} = Z_{*R} - (Z_R R + Z) = Z_{*R} - Z_R R - Z$$

    (1) Eksportendringen: $Z_{*R} > 0$

    (2) Importendringen: $-Z_R R - Z \lesseqgtr 0$ siden $Z_R R < 0$ og $Z > 0$
  - Marshall-Learner-betingelsen: Antar at nettoeffekten av økt realvalutakurs er økt nettoeksport $X_R > 0$, det vil si at $Z_{*R} - Z_R R > Z$.
- Opererer med tre markeder innenlands:
  - Varemarkedet
  - Pengemarkedet
  - Obligasjonsmarkedet
- Varemarkedet med fast valutakurs: IS-kurven
  - Kombinasjoner av produksjon og rentenivå som gir likevekt i varemarkedet.
  - Setter (2-5) inn i (1):

    $$Y = C\left(Y - \rho_* \frac{EF_*}{P} - T, \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}, i - p_e, \rho_*\right) + I(i - p_e, \rho_*) + G + X\left(\frac{EP_*}{P}, Y, Y_*\right)$$
  - Helning på IS-kurven (fast kurs):

    $$\left.\frac{dY}{di}\right|_{IS} = C_Y \left.\frac{dY}{di}\right|_{IS} + C_\rho + I_\rho + X_Y \left.\frac{dY}{di}\right|_{IS}$$

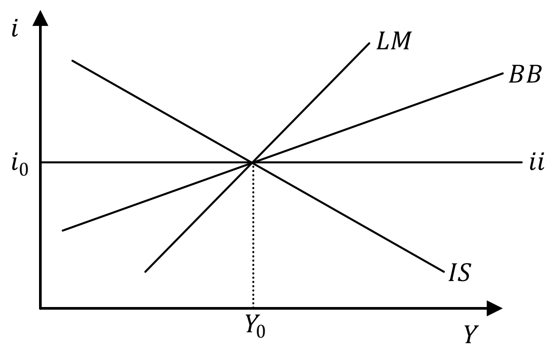
    $$\Rightarrow \quad (1 - C_Y - X_Y)\left.\frac{dY}{di}\right|_{IS} = C_\rho + I_\rho$$

    $$\Rightarrow \quad \left.\frac{dY}{di}\right|_{IS} = \frac{C_\rho + I_\rho}{1 - C_Y - X_Y} < 0$$
- Pengemarkedet: LM-kurven
  - Kombinasjoner av produksjon og rentenivå som gir likevekt pengemarkedet.
  - Utgangspunkt i (7):

    $$\frac{M}{P} = m(i, Y)$$
  - Helning på LM-kurven:

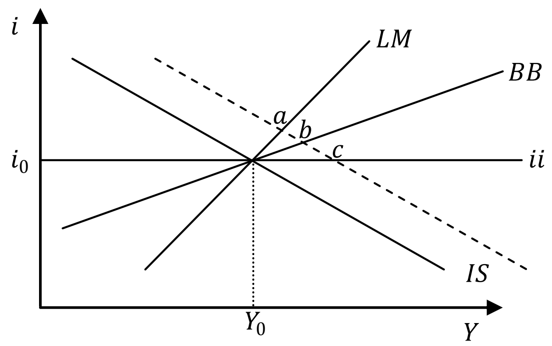
$$0 = m_i \left.\frac{di}{dY}\right|_{LM} + m_Y$$
$$\Rightarrow \quad m_i \left.\frac{di}{dY}\right|_{LM} = -m_Y$$
$$\Rightarrow \quad \left.\frac{di}{dY}\right|_{LM} = -\frac{m_Y}{m_i} > 0$$

- Obligasjonsmarkedet: BB-kurven
    - Kombinasjoner av produksjons og rentenivå som gir likevekt i obligasjonsmarkedet.
    - Setter (3) og (6) inn i (8):
    $$\frac{B}{P} = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P} - f\left(i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right) - m(i, Y)$$
    - Helning på BB-kurven:
    $$0 = -f_r \left.\frac{di}{dY}\right|_{BB} - m_i \left.\frac{di}{dY}\right|_{BB} - m_Y$$
    $$\Rightarrow \quad (f_r + m_i) \left.\frac{di}{dY}\right|_{BB} = -m_Y$$
    $$\Rightarrow \quad \left.\frac{di}{dY}\right|_{BB} = -\frac{m_Y}{f_r + m_i} > 0$$
- Rentestyring innebærer flat ii-kurve.
- Grafisk fremstilling:



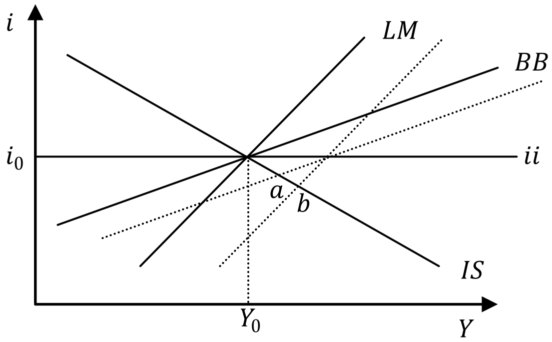
    - Begrunnelse for at BB-kurven er slakere enn LM-kurven: Obligasjonsmarkedet reagerer sterkere på renteendringer enn pengemarkedet.
- Finansmarkedene - likevekt i forskjellige regimer:
    - Pengemengdestyring: LM-kurven
        - M er eksogen; innebærer fullsterilisering.
        - Bevegelser langs LM-kurven.
        - Utgangspunkt i (7): $\frac{M}{P} = m(i, Y)$.
    - Obligasjonsstyring: BB-kurven
        - B er eksogen; innebærer ingen sterilisering.
        - Bevegelser langs BB-kurven.
        - Utgangspunkt i (8): $\frac{B}{P} = W_p - f(r, W_p) - m(i, Y)$.
    - Rentestyring: ii-kurven
        - i eksogen.
        - Bevegelser langs ii-kurven.

        - Flat ii-kurve.
- Case: Effekten av (ekspansiv) finanspolitikk: $dG > 0$ og/eller $dT < 0$
    - Utgangspunkt i IS-kurven:
      $Y = C\left(Y - \rho_* \frac{EF_*}{P} - T, \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}, i - p_e, \rho_*\right) + I(i - p_e, \rho_*) + G + X\left(\frac{EP_*}{P}, Y, Y_*\right)$
    - Effekten av økte offentlige utgifter: $\frac{dY}{dG} = C_Y \frac{dY}{dG} + 1 + X_Y \frac{dY}{dG}$
      $\Rightarrow \quad (1 - C_Y - X_Y)\frac{dY}{dG} = 1$
      $\Rightarrow \quad \frac{dY}{dG} = \frac{1}{1 - C_Y - X_Y} > 0$
    - Effekten av redusert skatt: $\frac{dY}{dT} = C_Y\left(\frac{dY}{dT} - 1\right) + X_Y \frac{dY}{dT}$
      $\Rightarrow \quad (1 - C_Y - X_Y)\frac{dY}{dT} = -C_Y$
      $\Rightarrow \quad \frac{dY}{dT} = -\frac{C_Y}{1 - C_Y - X_Y} < 0$



    - Ved rentestyring (punkt c): Stor effekt på Y, ingen effekt på i.
        - Innenlandske finansmarkeder: For å holde renta uendret kjøper SB obligasjoner. Dette fører til mer penger i økonomien og forhindrer at renta stiger som følge av den ekspansive finanspolitikken.
        - Utenlandsmarkedet: Uendret i gir uendret E og F_g
    - Ved ingen sterilisering (punkt b): Moderat økning i både Y og i.
        - Innenlandske finansmarkeder: Produksjonsøkningen skaper økt etterspørsel etter penger, og dette driver rentenivået opp. Rentehevingen motvirker etterspørselsøkningen etter penger, og dermed også etterspørselsreduksjonen etter obligasjoner.
        - Utenlandsmarkedet: Den moderate økningen i innenlandsk rente i gir moderat økning risikopremie r. Dette reduserer privat etterspørsel etter utenlandsvaluta slik at tilbudskurven rettet mot sentralbanken i valutamarkedet skifter ut. Resultatet er moderat økning i sentralbankens valutareserver $\left(dF_g > 0\right)$ ved fast valutakurs, eventuelt moderat appresiering $(dE < 0)$ ved flytende valutakurs.
    - Ved full sterilisering (punkt a): Liten økning i Y, stor økning i i.
        - Innenlandske finansmarkeder: Økt produksjon skaper økt pengeetterspørsel. Full sterilisering innebærer at renten heves så mye at

pengemengden ikke endres. Dette motvirker store deler av den initiale økningen i produksjon.
        - Utenlandsmarkedet: Den store økningen i i gir stor økning risikopremien og dermed stor økning i valutareserver $(dF_g > 0)$ ved fast valutakurs, eventuelt høy appresiering $(dE < 0)$ ved flytende valutakurs.
- Case: Effekten av (ekspansiv) pengepolitikk: $dB < 0$
  LM- og BB-kurven:



    - Skift i kurvene:
        - BB: For gitt produksjonsnivå Y må i ned for at privat sektor skal være villig til å redusere obligasjonsbeholdningen.
        - LM: For gitt produksjonsnivå Y må i ned for at privat sektor skal være villig til å absorbere den økte pengemengden.
        - Altså likt horisontalt skift i LM og BB. Y virker gjennom $m(i,Y)$ i begge tilfeller:

$$\frac{M}{P} = m(i,Y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dM}{dY} = m_Y \quad \Rightarrow \quad dM = m_Y P dY$$

$$\frac{B}{P} = W_p - f(r, W_p) - m(i,Y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dB}{dY} = -m_Y \quad \Rightarrow \quad dB = -m_Y P dY$$

$$\Rightarrow \quad dM = -dB > 0$$

    - Ved rentestyring (punkt c): Ingen effekt på Y eller i.
        - Innenlandske finansmarkeder: Kjøp av obligasjoner oppnås ved å redusere renta. Fastrentepolitikk gjør det derfor ikke mulig å iverksette ekspansiv pengepolitikk.
        - Utenlandsmarkedet: Uendret i gir uendret E og F_g.
    - Ved ingen sterilisering (punkt a): Moderat økning i Y, moderat reduksjon i i.
        - Innenlandske finansmarkeder: Sentralbankens kjøp av obligasjoner skjer ved hjelp av rentereduksjon. Deler av den økte pengemengden innenlands lekker ut i utenlandsmarkedet på grunn av rentereduksjonen, og dette gir isolert sett noe renteheving igjen.
        - Utenlandsmarkedet: Den moderate reduksjonen i i gir moderat reduksjon i risikopremie og dermed moderat reduksjon i valutareservene $(dF_g < 0)$ ved fast valutakurs, eventuelt moderat depresiering $(dE > 0)$ ved flytende valutakurs.

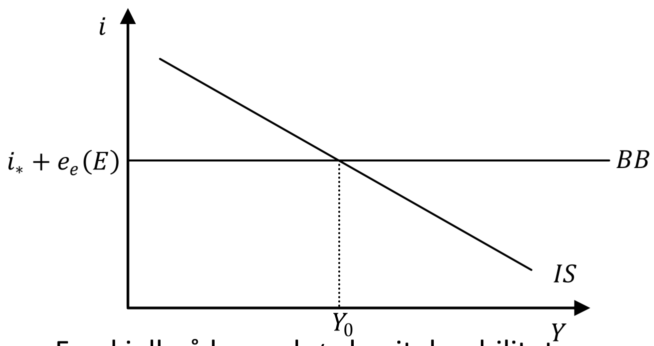
- Ved full sterilisering (punkt b): Stor økning i Y, stor reduksjon i i.
  - Innenlandske finansmarkeder: Sentralbankens kjøp av obligasjoner skjer ved hjelp av rentereduksjon. Deler av den økte pengemengden lekker ut i utenlandsmarkedet på grunn av rentereduksjonen, og dette gir isolert sett noe renteheving igjen. Ved full sterilisering gjentas operasjonen inntil initialekspansjonen er fullført. Slik sett innebærer dette større rentereduksjon og større produksjonsøkning enn uten sterilisering.
  - Utenlandsmarkedet: Den store reduksjonen i i gir stor reduksjon risikopremien og dermed stor reduksjon i valutareserver $(dF_g < 0)$ ved fast valutakurs, eventuelt høy depresiering $(dE > 0)$ ved flytende valutakurs.

- Kapitalmobilitet:
  - Graden av kapitalmobilitet: $|f_r|$

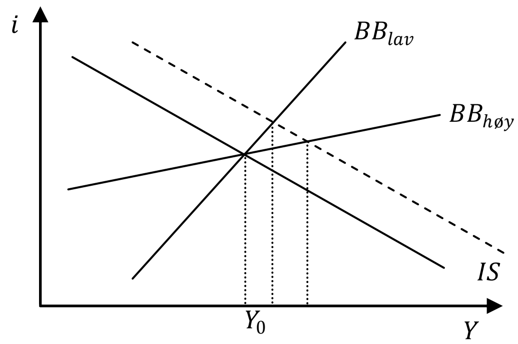
$$\left.\frac{di}{dY}\right|_{BB} = -\frac{m_Y}{f_r + m_i} > 0$$

$$\Rightarrow \quad lim_{|f_r|\to\infty}\left(\left.\frac{di}{dY}\right|_{BB}\right) = 0$$

  - Ved perfekt kapitalmobilitet faller de andre regimene bort; BB-kurven smelter sammen med renteparitetskurven:

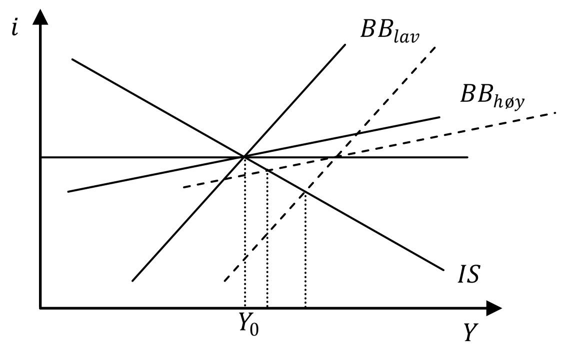


  - Forskjell på lav og høy kapitalmobilitet:
    - Finanspolitikk (ekspansiv):



- Gitt økning i G og/eller reduksjon i T gir størst økning i Y når kapitalmobiliteten er høy: Finanspolitikk er mer effektivt desto høyere kapitalmobilitet.

            - Men: Effekten av feildosert finanspolitikk (for eksempel som respons på sjokk) blir også større.
        - Pengepolitikk (ekspansiv):



            - Gitt økning i M (reduksjon i B) gir størst økning i Y når kapitalmobiliteten er lav: Pengepolitikk mer effektivt desto lavere kapitalmobilitet.
            - Men: Effekten av feildosert pengepolitikk (for eksempel som respons på sjokk) blir også større.

- Økonomiske sjokk:
  1. Realetterspørselssjokk, for eksempel C, I, X, P_*, Y_*
  2. Pengemarkedssjokk
  3. Valutamarkedssjokk, for eksempel e_e
- Sjokkene kan gi effekt i ett eller flere markeder.
    - Rene realetterspørselssjokk skifter IS-kurven på samme måte som ved finanspolitikk.
    - Rene pengemarkedssjokk skifter LM- og BB-kurven på samme måte som pengepolitikk.
    - Rene valutamarkedssjokk skifter likevekten i valutamarkedet (og likevekten i obligasjonsmarkedet når det ikke er noen sterilisering).
- Case: Devaluering ($dE > 0$):
    - Varemarkedet: IS-kurven med hensyn på E:

$$Y = C\left(Y - \rho_* \frac{EF_*}{P} - T, \frac{M_0+B_0+EF_{p0}}{P}, i - p_e, \rho_*\right) + I(i - p_e, \rho_*) + G + X\left(\frac{EP_*}{P}, Y, Y_*\right)$$

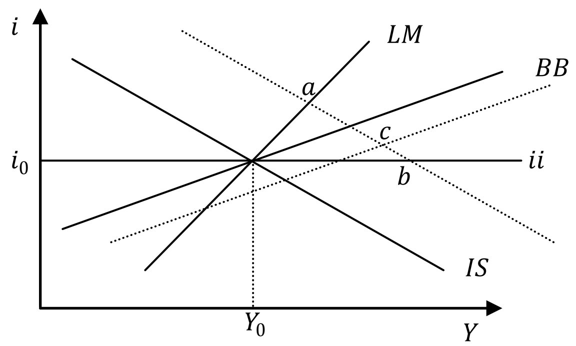
$$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dE} = C_Y\left(\frac{dY}{dE} - \rho_* \frac{F_*}{P}\right) + C_W \frac{F_{p0}}{P} + X_R \frac{P_*}{P} + X_Y \frac{dY}{dE}$$

$$\Rightarrow \quad (1 - C_Y - X_Y)\frac{dY}{dE} = \left(-C_Y\rho_* F_* + C_W F_{p0} + X_R P_*\right)\frac{1}{P}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dE} = \frac{\left(-C_Y\rho_* F_* + C_W F_{p0} + X_R P_*\right)\frac{1}{P}}{1 - C_Y - X_Y} = \frac{\Delta_E}{1 - C_Y - X_Y}$$

        - Kan komponere i tre effekter:
            - Inntektseffekten: $-C_Y\rho_* F_*$
            - Formueeffekten: $C_W F_{p0}$
            - Konkurranseeffekten: $X_R P_*$

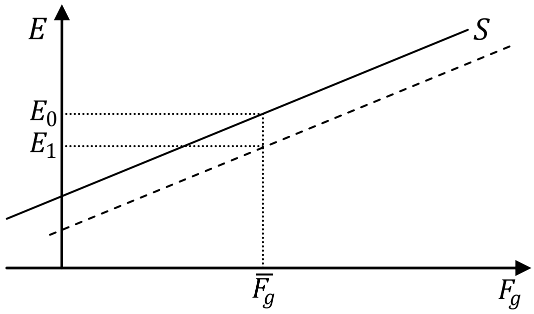
    - Antar at $\Delta_E > 0$, altså at devaluering påvirker nasjonalproduktet positivt.
- Finansielle markeder:
    - $LM: m(i, Y)$
      $\Rightarrow$ Ingen skift
    - ii:
      $\Rightarrow$ Ingen skift
    - $BB: \frac{B}{P} = \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P} - f\left(i - i_* - e_e(E), \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}\right) - m(i, Y)$
      $\Rightarrow$ Porteføljesammensetningseffekt:
      $dE > 0 \quad \Rightarrow \quad dF_P < 0 \quad \Rightarrow \quad dB^d > 0$
      $\Rightarrow$ Forventningseffekt:
      $dE > 0 \quad \Rightarrow \quad de_e < 0 \quad \Rightarrow \quad dr > 0 \quad \Rightarrow \quad dF_P < 0 \quad \Rightarrow \quad dB^d > 0$
      Begge effektene gir økt etterspørsel etter obligasjoner, og dermed likevekt i obligasjonsmarkedet til lavere rentenivå.
- Oppsummering: Makroøkonomiske effekter av en devaluering:



    - Rentestyring (b): $dY > 0, di = 0$
    - Obligasjonsstyring (c): $dY > 0, di \gtreqless 0$ (i grafen over > 0)
    - Pengestyring (a): $dY > 0, di > 0$
- Valutareservene:
    - Porteføljesammensetningseffekten:
      $dE > 0 \quad \Rightarrow \quad dF_p < 0 \quad \Rightarrow \quad dF_g > 0$
    - Risikopremien:
      $dE > 0 \quad \Rightarrow \quad de_e < 0 \quad \Rightarrow \quad dr > 0 \quad \Rightarrow \quad dF_g > 0$
      og $\quad di > 0 \quad \Rightarrow \quad dr > 0 \quad \Rightarrow \quad dF_g > 0$
      Merk at det er mulig med $di < 0$ ved obligasjonsstyring. I praksis kan imidlertid ikke $dF_g < 0$ fordi:
      $dY > 0 + di < 0 \quad \Rightarrow \quad dM^d > 0 \quad \Rightarrow \quad dF_p < 0 \quad \Rightarrow \quad dF_g > 0$

- Varemarkedet med flytende valutakurs: $ISFX$-kurven
    - Utgangspunkt i:
      $Y = C\left(Y - \rho_* \frac{EF_*}{P} - T, \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}, i - p_e, \rho_*\right) + I(i - p_e, \rho_*) + G + X\left(\frac{EP_*}{P}, Y, Y_*\right)$
      Ved fast kurs måles effekten av endringer i i på Y, der E holdes konstant. Her vil endringer i Y også gi endringer i E. En økning i i øker risikopremien på innenlandsk

valuta, og skifter dermed tilbudskurven i valutamarkedet utover. Resultatet er appresiering:



- $di > 0$ gir økt risikopremie og redusert tilbud av utenlandsk valuta, og dermed appresiering i valutamarkedet ($E_1 < 0$). Altså: $E = E(i - i_*, P, F_g)$.
- Differensiering med hensyn på i:

$$Y = C\left(Y - \rho_* \frac{EF_*}{P} - T, \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}, \rho, \rho_*\right) + I(\rho, \rho_*) + G + X\left(\frac{EP_*}{P}, Y, Y_*\right)$$

$$\left.\frac{dY}{di}\right|_{ISFX} = C_Y \left.\frac{dY}{di}\right|_{ISFX} + C_\rho + I_\rho + X_Y \left.\frac{dY}{di}\right|_{ISFX} + \Delta_E E_1$$

der $\Delta_E > 0$ er effekten av en depresiering på den samlede etterspørselen etter hjemmevarer og E_1 er endringen fra den gamle kursen.

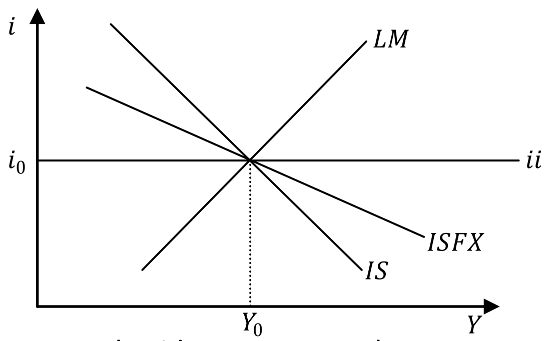
$\Rightarrow$ $(1 - C_Y - X_Y)\left.\frac{dY}{di}\right|_{ISFX} = C_\rho + I_\rho + \Delta_E E_1$

$\Rightarrow$ $\left.\frac{dY}{di}\right|_{ISFX} = \frac{C_\rho + I_\rho + \Delta_E E_1}{1 - C_Y - X_Y} < 0$

$\Rightarrow$ Ser her at $ISFX$-kurven faller slakere enn IS-kurven; effekten av en endring i i har en ekstraeffekt på Y siden renteøkning her gir appresiering og dermed ytterligere svekket handelsbalanse. Altså; økt i gir redusert Y fordi:
1. Fast kurs: $C \downarrow$ og $I \downarrow$
2. Flytende kurs: $C \downarrow$, $I \downarrow$ og $E \downarrow$

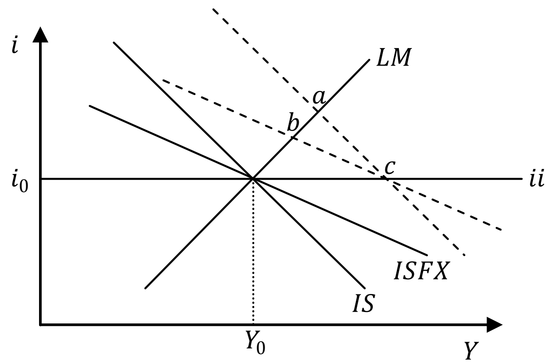
$\Rightarrow$ $\Delta_E > 0$ følger av Marshall-Learner ($X_R > 0$), $E_1 < 0$ per definisjon (ved appresiering).

- Grafisk fremstilling:



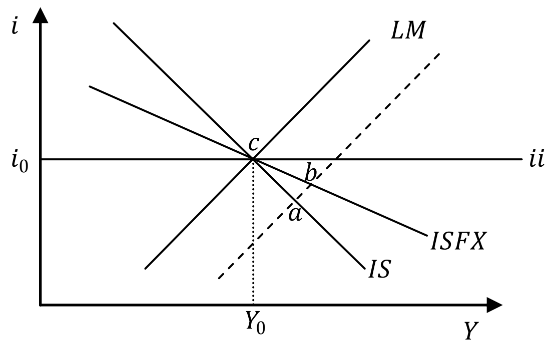
  - Merk: Siden etterspørselen etter penger ikke avhenger av E, er LM uendret. Siden flytende kurs innebærer at $dM = 0$ gir $dB = 0$, sammenfaller BB med LM.

- Case: Effekten av (ekspansiv) finanspolitikk under flytende kurs: $dG > 0$ og/eller $dT < 0$
  - Alternativ 1: ISFX-kurven med hensyn på G:
    $$Y = C\left(Y - \rho_*\frac{EF_*}{P} - T, \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}, i - p_e, \rho_*\right) + I(i - p_e, \rho_*) + G + X\left(\frac{EP_*}{P}, Y, Y_*\right)$$
    $$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dG} = C_Y\frac{dY}{dG} + 1 + X_Y\frac{dY}{dG} + \Delta_E E_1$$
    $$\Rightarrow \quad (1 - C_Y - X_Y)\frac{dY}{dG} = 1 + \Delta_E E_1$$
    $$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dG} = \frac{1 + \Delta_E E_1}{1 - C_Y - X_Y} > 0$$
  - Alternativ 2: ISFX-kurven med hensyn på T:
    $$Y = C\left(Y - \rho_*\frac{EF_*}{P} - T, \frac{M_0 + B_0 + EF_{p0}}{P}, i - p_e, \rho_*\right) + I(i - p_e, \rho_*) + G + X\left(\frac{EP_*}{P}, Y, Y_*\right)$$
    $$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dT} = C_Y\left(\frac{dY}{dT} - 1\right) + X_Y\frac{dY}{dT} + \Delta_E E_1$$
    $$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dT} = \frac{-C_Y + \Delta_E E_1}{1 - C_Y - X_Y} < 0$$
  - Grafisk:



  - Ved rentestyring (punkt c): Stor effekt på Y, ingen effekt på i.
    - Innenlandske finansmarkeder: For å holde renta uendret kjøper SB obligasjoner. Dette fører til mer penger i økonomien og forhindrer at renta stiger som følge av den ekspansive finanspolitikken. Uendret rente innebærer uendret E, og dermed likt horisontalt skift i $ISFX$ som IS.
    - Utenlandsmarkedet: Uendret i gir uendret E og F_g. Dermed ingen endringer i valutamarkedet.
  - Ved gitt pengemengde (punkt b): Liten økning i både Y og i.
    - Innenlandske finansmarkeder: Produksjonsøkningen skaper økt etterspørsel etter penger, og dette driver rentenivået opp. Rentehevingen motvirker etterspørselsøkningen etter penger, og dermed også etterspørselsreduksjonen etter obligasjoner.
    - Utenlandsmarkedet: Økningen i i gir økt risikopremie og dermed økt tilbud av utenlandsvaluta rettet mot sentralbanken. Dette gir appresiering $(dE < 0)$ ved flytende valutakurs.
    - Merk at effekten på i og Y av finanspolitikken er mindre enn ved fast valutakurs på grunn av appresieringen i E.
- Case: Effekten av (ekspansiv) pengepolitikk under flytende valutakurs: $dM > 0$

LM-kurven:



- Skiftet i LM: For gitt produksjonsnivå Y må i ned for at privat sektor skal være villig til å absorbere den økte pengemengden/redusere obligasjonsbeholdningen. Y virker gjennom $m(i,Y)$:

  $$\frac{M}{P} = m(i,Y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dM}{dY} = m_Y \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dY} = Pm_Y$$

  $$\frac{B}{P} = W_p - f(r, W_p) - m(i,Y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P}\frac{dB}{dY} = -m_Y \quad \Rightarrow \quad \frac{dB}{dY} = -Pm_Y$$

  $\Rightarrow \quad dM = -dB > 0$
- Ved rentestyring (punkt c): Ingen effekt på Y eller i.
  - Innenlandske finansmarkeder: Sentralbankens kjøp av obligasjoner oppnås ved å redusere renta. Fastrentepolitikk gjør det derfor ikke mulig å iverksette ekspansiv pengepolitikk.
  - Utenlandsmarkedet: Uendret i gir uendret E og F_g.
- Ved ingen sterilisering/full sterilisering (punkt b): Stor økning i Y, moderat reduksjon i i.
  - Innenlandske finansmarkeder: Kjøp av obligasjoner skjer ved hjelp av rentereduksjon. Salget fører til økt pengemengde for private ($dM > 0$), og dermed til økt Y. Depresiering fører til ytterligere økning i Y.
  - Utenlandsmarkedet: Reduksjonen i i gir økt etterspørsel etter utenlandsvaluta og dermed redusert tilbud rettet mot sentralbanken. Dette fører til depresiering $(dE > 0)$ ved flytende valutakurs.
  - Merk: Depresieringen gjør at økningen i Y som en følge av ekspansiv pengepolitikk er større enn ved fast valutakurs.

- Sjokk i valutamarkedet ved fast og flytende kurs:
  - Anta økte forventninger om depresiering: $e_e \uparrow$

    $\Rightarrow$ Innebærer redusert risikopremie på NOK

    $\Rightarrow$ Økt etterspørsel etter utenlandsk valuta

    $\Rightarrow$ Skift innover i tilbudskurven i rettet mot sentralbanken i utenlandsmarkedet
  - Konsekvenser ved fast kurs:
    - Reduksjon i sentralbankens utenlandsreserver ($dF_g < 0$) på grunn av skiftet innover i tilbudskurven.
    - Ingen konsekvenser for innenlandsmarkedet (ingen skift i IS).

    - Konsekvenser ved flytende kurs:
        - Depresiering på grunn av skiftet innover i tilbudskurven.
        - Depresieringen medfører positivt skift i $ISFX$, og dermed økning i i og Y (gitt at det ikke er fastrentepolitikk). Renteøkningen begrenser noe av økningen i Y (ved fastrentepolitikk blir dermed økningen i Y størst).
- Kapitalmobilitet under fast og flytende valutakurs:
    - Med utgangspunkt i $E = E\left(i - i_*, P, F_g\right)$ vil høyere kapitalmobilitet gi større effekter på valutakursen av endringer i risikopremien. Dette vises som flatere $ISFX$-kurve desto høyere kapitalmobilitet.
    - Konklusjon I: Finanspolitikk under flytende valutakurs er mindre effektiv desto høyere kapitalmobilitet. Dette er motsatt av hva som gjelder under fast valutakurs når B holdes konstant.
    - Konklusjon II: Pengepolitikk under flytende valutakurs er mer effektiv desto høyere kapitalmobilitet.
    - Oppsummering av fast og flytende valutakurs:
        - Med fast kurs og eksogen B er finanspolitikken mer effektiv og pengepolitikken mindre effektiv med høyere kapitalmobilitet.
        - Med flytende kurs er finanspolitikken mindre effektiv og pengepolitikken mer effektiv med høyere kapitalmobilitet.

2. Arbeidsmarkedet

2A. Fleksible og rigide lønninger (Heijdra kap. 6)

- Stiliserte fakta:
  - Arbeidsledighetsraten fluktuerer over tid.
  - Arbeidsledighetsraten fluktuerer mer mellom konjunktursykluser enn innenfor. Det tar også lang tid før effektene av et sjokk dør ut: I modellen $u_t = \alpha + \beta u_{t-1}$ er β rett under 1.
  - Arbeidsledighetsraten varierer kraftig mellom land, muligens på grunn av forskjellige arbeidsmarkedsinstitusjoner.
  - Arbeidsledighetsraten varierer kraftig mellom forskjellige samfunnsgrupper.
  - Økningen i europeisk ledighet faller sammen med en enorm økning i langtidsledigheten.
  - Få ledige har selv valgt å være ledige.
  - På veldig lang sikt er det ingen klar trend innenfor ledigheten, den konvergerer mot et slags likevektsnivå:

    $u_t = \alpha + \beta u_{t-1}$

    $\Rightarrow \quad (1-\beta)\bar{u} = \alpha$

    $\Rightarrow \quad \bar{u} = \frac{\alpha}{1-\beta}$
- Standard makroøkonomisk arbeidsmarkedsteori:
  - Produktfunksjon (på kort sikt er kapitalmengden fast): $Y = G(N, \bar{K}) = F(N)$

    $\Rightarrow \quad F_N > 0$ og $F_{NN} < 0$
  - Profittmaksimerende tilpasning: $\pi = PF(N) - WN$

    $\Rightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial N} = PF_N - W = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_N = \frac{W}{P} = w$

    $\Rightarrow$ Etterspørsel av arbeidskraft slik at grenseproduktiviteten er lik reallønnen.

    $\Rightarrow \quad N^D = N^D(w)$
- Konsekvenser av minstelønn i et marked med faglært og ufaglært arbeidskraft:
  - Produktfunksjon: $Y = G(N_U, N_S, \bar{K}) = F(N_U, N_S)$

    $\Rightarrow \quad F_U > 0, F_S > 0$

    $F_{UU} < 0, F_{SS} < 0$
  - Profittmaksimerende tilpasning:

    $\pi = PF(N_U, N_S) - W_U N_U - W_S N_S$

    $\Rightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial N_U} = PF_U - W_U = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_U = \frac{W_U}{P} = w_U$

    $\Rightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial N_U} = PF_U - W_U = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_S = \frac{W_S}{P} = w_S$

    $\Rightarrow$ Etterspørsel av arbeidskraft slik at grenseproduktiviteten er lik reallønnen.

    $\Rightarrow \quad N_U^D = N_U^D(w_U, w_S), N_S^D = N_S^D(w_U, w_S)$

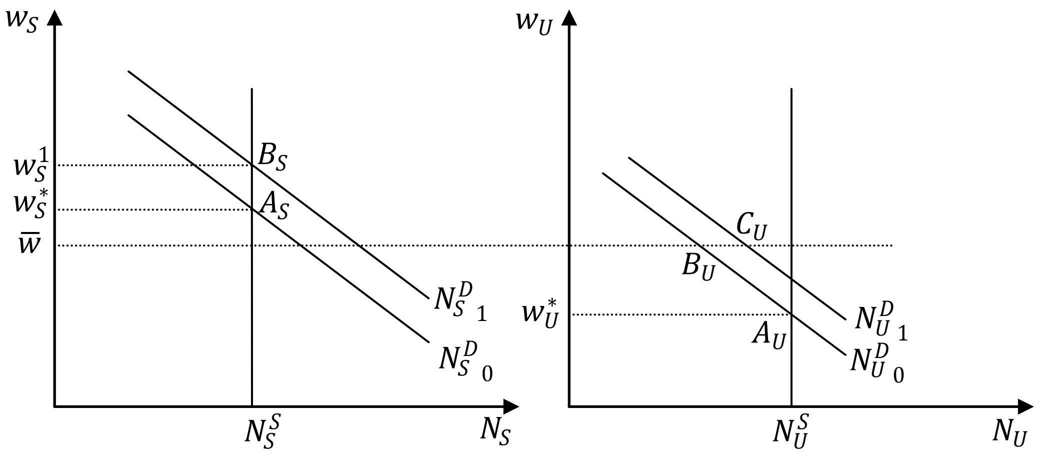
- Antar negativ sammenheng mellom etterspørselen etter en gitt type arbeidskraft og tilhørende reallønn:

  $$\Rightarrow \quad \frac{\partial N_U^D}{\partial w_U} < 0, \frac{\partial N_S^D}{\partial w_S} < 0$$

- Antar at faglært og ufaglært arbeidskraft er nettosubstitutter:

  $$\Rightarrow \quad \frac{\partial N_U^D}{\partial w_S} > 0, \frac{\partial N_S^D}{\partial w_U} > 0$$

- Antar perfekte uelastiske tilbudskurver (vertikale tilbudskurver).
- Antar minimumslønnen $\overline{w}$ som er høyere enn markedsklarerende lønn w_U^* for ufaglærte, men lavere enn markedsklarerende lønn w_S^* for ufaglærte. Dette skaper ledighet blant ufaglærte og høyere lønn blant faglærte:



- Intuisjon:
  - I utgangspunktet er markedene klarert med tilpasning i markedet for faglært arbeidskraft i punktet A_S, og tilpasning i markedet for ufaglært arbeidskraft i punktet A_U.
  - Innføring av minstelønn $\overline{w}$ som er lavere enn likevektslønn w_S^* for faglærte, men høyere enn likevektslønn w_U^* for ufaglærte, gir ledighet blant ufaglærte. Tilpasning i markedet for ufaglærte i punktet B_U.
  - Minstelønnen fører til substitusjon mot faglært arbeidskraft, illustrert ved et positivt skift i etterspørselskurven N_S^D. Det positive skiftet fører til økt lønn for faglærte. Tilpasning i markedet for faglærte i punktet B_S.
  - Dette motvirkes noe av substitusjon tilbake mot ufaglært arbeidskraft. Denne substitusjonen trekker ledigheten blant ufaglærte noe ned igjen. Tilpasning i markedet for ufaglærte i punktet C_U.
  - Nettoeffekten av minstelønnen er altså økt lønn for faglærte og økt lønn og ledighet for ufaglærte.
- Hvordan unngå ledighet ved minstelønn?
  - Subsidiering av ufaglært arbeidskraft slik at denne blir mer attraktiv.
  - Offentlig sysselsetting av ufaglært arbeidskraft for å motvirke ledigheten.
  - Utdanning av ufaglærte for å gjøre dem mer attraktive på arbeidsmarkedet.

- Arbeidsmarkedet og skatt:

- Antagelser:
  - Fortsatt kort sikt, det vil si $K = \overline{K} = 1$).
  - Tre typer skatt:
    - Arbeidsgiveravgift t_E
    - Inntektsskatt T
    - Forbruksskatt (moms) t_C
  - Én type arbeidskraft: N

- Bedrifter og skatt: Etterspørselssiden
  - Bedriftenes tilpasning:

    $\pi = PF(N) - W(1 + t_E)N$

    $\Rightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial N} = PF_N - W(1 + t_E) = 0$

    $\Rightarrow \quad F_N = \frac{W}{P}(1 + t_E) = w(1 + t_E) \equiv \overline{w}$

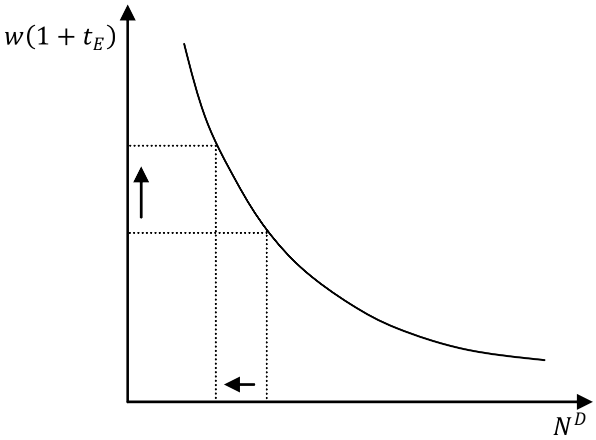
    Forståelse: Marginalproduktet av arbeidskraft er lik brutto reallønnsutgift $\overline{w}$ for bedrifter.

    $\Rightarrow \quad$ Etterspørselen etter arbeidskraft: $N^D = N^D\big(w(1 + t_E)\big)$
  - Sammenhengen mellom etterspørselen etter arbeidskraft og lønnsnivå:
    - Analytisk:

      Totalderiverer førsteordensbetingelsen $F_N = \overline{w}$ med hensyn på $\overline{w}$:

      $$F_{NN}\frac{\partial N}{\partial \overline{w}} = 1$$

      $\Rightarrow \quad \frac{\partial N^D}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{F_{NN}} < 0$
    - Grafisk:



    - Etterspørselen på log-lineær form (vekstform):
      - Relativ endring i arbeidskraftetterspørselen: $\tilde{N}^D \equiv \frac{dN^D}{N^D}$
      - Relativ endring i reallønnen: $\tilde{w} \equiv \frac{dw}{w}$
      - Relativ endring i arbeidsgiveravgiften: $\tilde{t}_E \equiv \frac{dt_E}{1+t_E}$
      - Relativ endring i brutto reallønnsutgift $\overline{w} = w(1 + t_E)$: $\frac{d\overline{w}}{\overline{w}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{d[w(1+t_E)]}{w(1+t_E)} = \frac{dw\,(1+t_E)+wd\,t_E}{w(1+t_E)} = \frac{dw}{w} + \frac{dt_E}{1+t_E} = \widetilde{w} + \tilde{t}_E$$

- Etterspørselen på log-lineær form:

$$\varepsilon_D \equiv -\frac{\frac{dN^D}{N^D}}{\frac{d\overline{w}}{\overline{w}}} = -\frac{dN^D}{N^D}\frac{\overline{w}}{d\overline{w}} = -\widetilde{N}^D \frac{1}{\widetilde{w} + \tilde{t}_E}$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{N}^D = -\varepsilon_D(\widetilde{w} + \tilde{t}_E)$$

- Arbeidstakere og skatt: Tilbudssiden
  - Lineært skattesystem: $T = t_0 + t(WN^S)$
  - Generell skattefunksjon: $T = T(WN^S)$
    - Marginal skatterate: $t_M \equiv \frac{\partial T(WN^S)}{\partial WN^S}$ $\Rightarrow$ konstant med flat skatt
    - Gjennomsnittlig skatterate: $t_A \equiv \frac{T(WN^S)}{WN^S} = \frac{T}{WN^S}$

      (1) $\frac{\partial t_A}{\partial W} > 0 \quad \Rightarrow$ økende med inntekt

      (2) $$\frac{\partial t_A}{\partial N^S} = \frac{\frac{\partial T(WN^S)}{\partial WN^S}W(WN^S) - TW}{(WN^S)^2} = \frac{T_M}{N^S} - \frac{T}{WN^{S^2}} = \frac{t_M - t_A}{N^S}$$
  - Husholdningenes preferanser:

    $U = U(C, 1 - N^S)$

    der $U_C > 0$, $U_{1-N^S} > 0$,

    $U_{CC} < 0$ og $U_{1-N^S,1-N^S} < 0$
  - Husholdningenes budsjettrestriksjon:

    $P(1 + t_c)C = WN^S - T(WN^S) = (1 - t_A)WN^S$
  - Nyttemaksimerende tilpasning:

    $\mathcal{L} = U(C, 1 - N^S) - \lambda[P(1 + t_c)C - (1 - t_A)WN^S]$

    (1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = U_C - \lambda P(1 + t_c) = 0$

    $\Rightarrow \quad \lambda = \frac{U_C}{P(1+t_c)}$

    (2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^S} = -U_{1-N^S} + \lambda W\left(-\frac{\partial t_A}{\partial N^S}N^S + (1 - t_A)\right) = -U_{1-N^S} + \lambda W(1 - t_M) = 0$

    $\Rightarrow \quad \lambda = \frac{U_{1-N^S}}{W(1-t_M)}$

    (3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -P(1 + t_c)C + (1 - t_A)WN^S = 0$

    $\Rightarrow \quad P(1 + t_c)C = (1 - t_A)WN^S$

    Av (1) og (2):

    $$\lambda = \frac{U_C}{P(1 + t_c)} = \frac{U_{1-N^S}}{W(1 - t_M)}$$

    $$\Rightarrow \quad \frac{U_{1-N^S}}{U_C} = \frac{W}{P}\frac{1-t_M}{1+t_C} = w\frac{1-t_M}{1+t_C}$$

    Av (3):

    $P(1 + t_C)C = (1 - t_A)WN^S$

    $\Rightarrow \quad (1 + t_C)C = w(1 - t_A)N^S$
  - Determinering av arbeidstilbudet N^S:

$$\left.\begin{aligned}\frac{U_{1-N^S}}{U_C} &= w\frac{1-t_M}{1+t_C}\\ (1+t_C)C &= w(1-t_A)N^S\end{aligned}\right\} N^S = N^S(w, t_M, t_A, t_C)$$

- Betydningen av relative lønns- og skatteendringer for arbeidskrafttilbudet:
  - Reallønnen w og konsumentskatten t_C:
    - Konsumentene er opptatt av hvor stor reallønna w er i forhold til konsumentskatten t_C: $\frac{w}{1+t_C}$; altså relative endringer når man får skift i for eksempel reallønn:

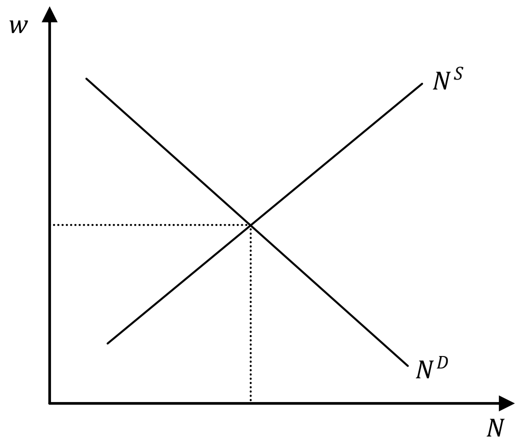
      $$\frac{d\left(\frac{w}{1+t_C}\right)}{\frac{w}{1+t_C}} = \frac{\frac{dw(1+t_C)-wdt_C}{(1+t_C)^2}}{\frac{w}{1+t_C}} = \frac{dw(1+t_C)^2}{w(1+t_C)^2} - \frac{wdt_C(1+t_C)}{w(1+t_C)^2}$$

      $$= \frac{dw}{w} - \frac{dt_C}{1+t_C} = \widetilde{w} - \tilde{t}_C$$

      der $\widetilde{w} \equiv \frac{dw}{w}$ og $\tilde{t}_C \equiv \frac{dt_C}{(1+t_C)}$
    - Intuisjon:
      - Ved relative lønnsøkninger/konsumskattreduksjoner har vi to effekter på arbeidstilbudet:
        - Substitusjonseffekten: Fritid blir relativt dyrere sammenlignet med konsum. Trekker arbeidstilbudet opp.
        - Inntektseffekten: Blir mer penger til alle goder, også fritid. Trekker arbeidstilbudet ned.
      - Poeng: Effekten av lønn og konsumskatt er ekvivalent, men virker motsatt vei. En lønnsøkning trekker arbeidstilbudet i samme retning som en konsumentskattereduksjon. Vi antar at substitusjonseffekten dominerer. Dette gir stigende tilbudskurve: $\frac{\partial N^S}{\partial w} > 0$ og $\frac{\partial N^S}{\partial t_c} < 0$
  - Marginalskatten t_M:
    - Relativ vekst: $\tilde{t}_M \equiv \frac{dt_M}{(1-t_M)}$
    - Intuisjon: Til gitt t_A vil økt marginalskatt kun ha en substitusjonseffekt der fritid blir relativt billigere sammenlignet med konsum. Dette medfører redusert arbeidstilbud: $\frac{\partial N^S}{\partial t_M} < 0$
  - Gjennomsnittsskatten t_A:
    - Relativ vekst: $\tilde{t}_A \equiv \frac{dt_A}{(1-t_A)}$
    - Til gitt t_M vil økt gjennomsnittsskatt kun ha en inntektseffekt der både fritid og konsum blir dyrere. Dette medfører større arbeidstilbud: $\frac{\partial N^S}{\partial t_A} > 0$
- Tilbudet på log-lineær form: $\widetilde{N}^S = \varepsilon_{SW}(\widetilde{w} - \tilde{t}_C) - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M + \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A$

  - Ukompensert lønnselastisitet: $\varepsilon_{SW} = \frac{\frac{dN^S}{N^S}}{\frac{dw}{d}} = \frac{dN^S}{dw}\frac{w}{N^S}$
  - Kompensert lønnselastisitet (substitusjonseffekten): $\bar{\varepsilon}_{SW}$
  - Inntektselastisiteten: ε_{SI}

- Grafisk fremstilling av tilbud og etterspørsel i arbeidsmarkedet:
  - Tilbud: $\tilde{N}^S = \varepsilon_{SW}(\tilde{w} - \tilde{t}_C) - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M + \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A$
  - Etterspørsel: $\tilde{N}^D = -\varepsilon_D(\tilde{w} + \tilde{t}_E)$



- To modellvarianter: Fleksibel reallønn samt gitt konsumentreallønn og arbeidsledighet.
- Fleksibel reallønn:
  - Tilbud: $\tilde{N}^S = \varepsilon_{SW}(\tilde{w} - \tilde{t}_C) - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M + \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A$
  - Etterspørsel: $\tilde{N}^D = -\varepsilon_D(\tilde{w} + \tilde{t}_E)$
  - Likevekt: $\tilde{N}^S = \tilde{N}^D = \tilde{N}$
  - Relativ lønnsvekst: Løser ut likevektslikningen med hensyn på $\tilde{w}$:

    $\tilde{N} = \varepsilon_{SW}(\tilde{w} - \tilde{t}_C) - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M + \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A = -\varepsilon_D(\tilde{w} + \tilde{t}_E)$

    $\Rightarrow \quad \varepsilon_{SW}\tilde{w} - \varepsilon_{SW}\tilde{t}_C - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M + \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A = -\varepsilon_D\tilde{w} - \varepsilon_D\tilde{t}_E$

    $\Rightarrow \quad (\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D)\tilde{w} = \varepsilon_{SW}\tilde{t}_C + \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M - \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A - \varepsilon_D\tilde{t}_E$

    $\Rightarrow \quad \tilde{w} = \frac{\varepsilon_{SW}\tilde{t}_C + \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M - \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A - \varepsilon_D\tilde{t}_E}{\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D}$
  - Relativ sysselsettingsvekst:

$$\begin{aligned}
\tilde{N} = -\varepsilon_D(\tilde{w} + \tilde{t}_E) &= -\varepsilon_D\left(\frac{\varepsilon_{SW}\tilde{t}_C + \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M - \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A - \varepsilon_D\tilde{t}_E}{\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D} + \tilde{t}_E\right) \\
&= -\varepsilon_D\left(\frac{\varepsilon_{SW}\tilde{t}_C + \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M - \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A - \varepsilon_D\tilde{t}_E}{\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D} + \frac{(\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D)\tilde{t}_E}{\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D}\right) \\
&= -\varepsilon_D\left(\frac{\varepsilon_{SW}\tilde{t}_C + \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M - \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A - \varepsilon_D\tilde{t}_E + (\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D)\tilde{t}_E}{\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D}\right) \\
&= -\varepsilon_D\left(\frac{\varepsilon_{SW}\tilde{t}_C + \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M - \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A + \varepsilon_{SW}\tilde{t}_E}{\varepsilon_{SW} + \varepsilon_D}\right)
\end{aligned}$$

  - Skiftanalyser:
    - Case: $\tilde{t}_M > 0$

      $\Rightarrow \quad \tilde{N}^S < 0$

$\Rightarrow$ Skift innover i tilbudskurven

$\Rightarrow$ $\tilde{N} < 0$ og $\tilde{w} > 0$

- Case: $\tilde{t}_A > 0$

$\Rightarrow$ $\tilde{N}^S > 0$

$\Rightarrow$ Skift utover i tilbudskurven

$\Rightarrow$ $\tilde{N} > 0$ og $\tilde{w} < 0$

- Rigid konsumentreallønn og arbeidsledighet:
  - Innfører begrepet konsumentreallønn: $w_C = \frac{w(1-t_A)}{1+t_C}$
  - Relative endringer i konsumentreallønnen:

$$\tilde{w}_C \equiv \frac{dw_C}{w_C} = \frac{d\left(\frac{w(1-t_A)}{1+t_C}\right)}{\frac{w(1-t_A)}{1+t_C}} = \frac{\frac{(dw(1-t_A)-wdt_A)(1+t_C)-w(1-t_A)dt_C}{(1+t_C)^2}}{\frac{w(1-t_A)}{1+t_C}}$$

$$= \frac{\frac{dw(1-t_A)(1+t_C)}{(1+t_C)^2}}{\frac{w(1-t_A)}{1+t_C}} - \frac{\frac{wdt_A(1+t_C)}{(1+t_C)^2}}{\frac{w(1-t_A)}{1+t_C}} - \frac{\frac{w(1-t_A)dt_C}{(1+t_C)^2}}{\frac{w(1-t_A)}{1+t_C}}$$

$$= \frac{dw}{w} - \frac{dt_A}{1-t_A} - \frac{dt_C}{1+t_C} = \tilde{w} - \tilde{t}_A - \tilde{t}_C$$

  - Dette gir følgende log-lineariserte uttrykk for tilbud og etterspørsel etter arbeidskraft:

$\tilde{w}_C = \tilde{w} - \tilde{t}_A - \tilde{t}_C$

$\Rightarrow$ $\tilde{w} = \tilde{w}_C + \tilde{t}_A + \tilde{t}_C$

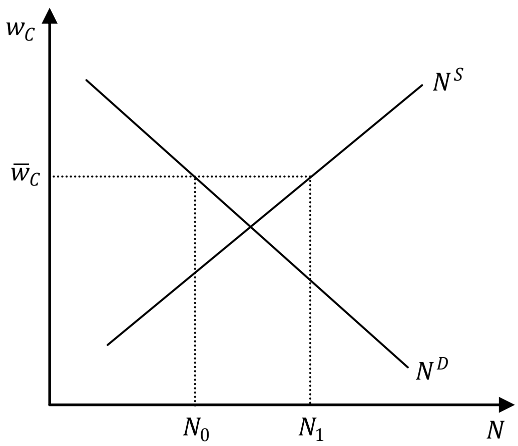
- Tilbud:

$$\tilde{N}^S = \varepsilon_{SW}(\tilde{w}_C + \tilde{t}_A + \tilde{t}_C - \tilde{t}_C) - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M + \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A$$
$$= \varepsilon_{SW}\tilde{w}_C + \varepsilon_{SW}\tilde{t}_A - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M + \varepsilon_{SI}\tilde{t}_A$$
$$= \varepsilon_{SW}\tilde{w}_C + (\varepsilon_{SW} + \varepsilon_{SI})\tilde{t}_A - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M$$
$$= \varepsilon_{SW}\tilde{w}_C + \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_A - \bar{\varepsilon}_{SW}\tilde{t}_M = \varepsilon_{SW}\tilde{w}_C + \bar{\varepsilon}_{SW}(\tilde{t}_A - \tilde{t}_M)$$

- Etterspørsel:

$$\tilde{N}^D = -\varepsilon_D(\tilde{w}_C + \tilde{t}_A + \tilde{t}_C + \tilde{t}_E)$$

  - Antar nå at den rigide realkonsumentlønnen er høyere enn likevektslønnen slik at sysselsettingen determineres av $\tilde{N}^D$: Sysselsetting lik N_0, ledighet lik $N_1 - N_0$.



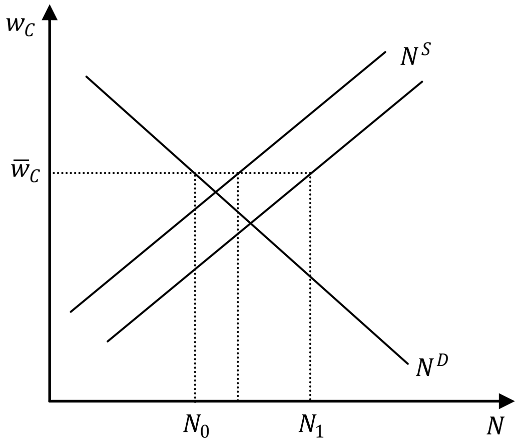
- Arbeidsledighetsraten: $U \equiv \frac{N^S - N^D}{N^D} \approx lnN^S - lnN^D$

  $$dU = \frac{1}{N^S} dN^S - \frac{1}{N^D} dN^D = \widetilde{N}^S - \widetilde{N}^D$$

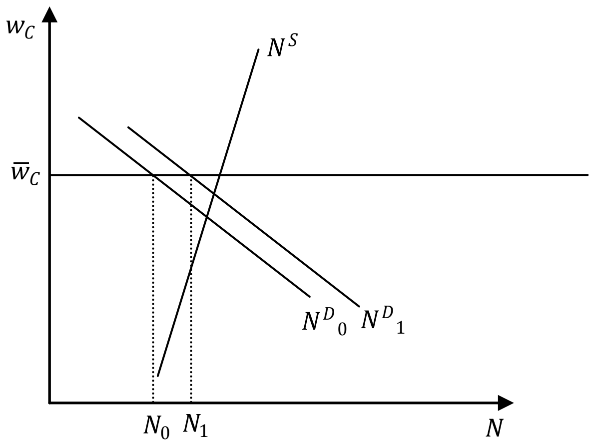
- Case: Økt marginalskatt $\tilde{t}_M > 0$

  ⇒ Redusert arbeidstilbud

  ⇒ Uendret sysselsetting og lavere ledighet



- Reallønnsrigiditet:
  - Fakta:
    - Uelastisk arbeidstilbud (spesielt for menn).
    - Skift i etterspørselen gir store skift i sysselsetting og ledighet, men små skift i reallønn.
    - Disse faktaene kan forklares ved innføring av minstelønn $\overline{w}_C$:



  - Teser om hvorfor bedrifter tilbyr høyere lønn enn lønnen som gir $F_N = w$, det vil si produktivitet lik reallønn:
    - Næringsargumentet
    - Risikoen for turnover
    - Høy lønn tiltrekker høyproduktive arbeidere
    - Høy lønn innebærer store alternativkostnader ved å ikke jobbe
    - Rettferdighetsargumentet

- Enkel effektivitetslønnsmodell:
  - Effektivitetslønn: Den lønnen som gir mest innsats per lønnskrone.
  - Bedriftens strategi: Å sette den lønnen som gir effektivitetslønn, og deretter la denne determinere etterspørselen etter arbeidskraft.
  - Produktfunksjon bedrift i:
    $Y_i = AF(L_i)$
    der $F_L > 0$ og $F_{LL} < 0$
  - Arbeidskraft: $L_i = E_i N_i$
  - Innsatsfunksjon i bedrift i:
    $E_i = e(W_i, W_R)$
    der $e_{W_i} > 0$ og $e_{W_R} < 0$
  - Profittmaksimerende tilpasning med hensyn på sysselsetting og lønn for bedrift i:
    $\pi_i = P_i Y_i - W_i N_i = P_i AF(e(W_i, W_R)N_i) - W_i N_i$

    (1) $\frac{\partial \pi_i}{\partial N_i} = P_i A F_L E_i - W_i = 0$

    $\Rightarrow \quad F_L = \frac{W_i}{P_i A E_i}$

    (2) $\frac{\partial \pi_i}{\partial W_i} = P_i A F_L N_i e_{W_i} - N_i = 0$

    $\Rightarrow \quad F_L = \frac{1}{P_i A e_{W_i}}$

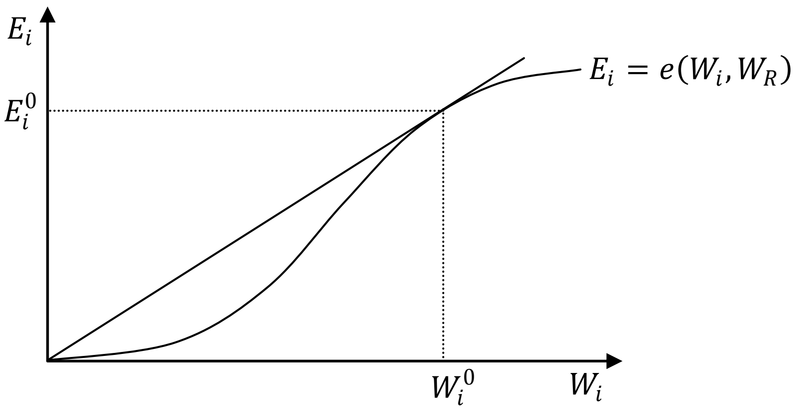
    Av (1) og (2): $\frac{W_i}{P_i A E_i} = \frac{1}{P_i A e_{W_i}}$

    $\Rightarrow \quad \frac{W_i}{E_i} e_{W_i} = 1$ der $\frac{W_i}{E_i} e_{W_i} \equiv \frac{W_i}{E_i}\frac{\partial E_i}{\partial W_i} = \frac{\frac{\partial E_i}{E_i}}{\frac{\partial W_i}{W_i}} \equiv \varepsilon_{W_i}$

    $\Rightarrow \quad \varepsilon_{W_i} = 1$

    $\Rightarrow$ Solow-betingelsen: I optimum for bedriften skal etterspørselsfunksjonen være enhetselastisk.
  - Forståelse av $\varepsilon_{W_i} = \frac{\frac{\partial E_i}{E_i}}{\frac{\partial W_i}{W_i}} = 1$:
    - $\varepsilon_{W_i} > 1$: Dersom lønnen øker med 1 % øker innsatsen med mer enn 1 %. Dermed er det optimalt å øke lønnen.
    - $\varepsilon_{W_i} < 1$: Dersom lønnen øker med 1 % øker innsatsen med mindre enn 1 %. Dermed er det optimalt å redusere lønnen.
  - Grafisk:
    - Bedriften ønsker å maksimere $\frac{E_i}{W_i}$, og vi definerer at den rette linjen ut fra origo har stigningstall $\frac{E_i}{W_i}$.
    - I punktet (W_i^0, E_i^0) tangerer linjen innsatskurven som har funksjonen $E_i = e(W_i, W_R)$, det vil si at:
      $$\frac{E_i}{W_i} = e_{W_i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{W_i}{E_i} e_{W_i} \equiv \varepsilon_{W_i} = 1$$



- Oppsummert: $\varepsilon_{W_i} = 1$ determinerer lønn, hvorpå $F_L = \frac{1}{P_i A e_{W_i}}$ determinerer sysselsetting.

- Arbeidsledighetsmodell: Ledighet i generell likevekt
  - Skal nå endogenisere W_R.
  - Antar en spesifisert innsatsfunksjon: $E_i = (W_i - W_R)^\varepsilon$ der $0 < \varepsilon < 1$. Dette gir:

$$\frac{W_i}{E_i} e_{W_i} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{W_i}{(W_i - W_R)^\varepsilon} \varepsilon (W_i - W_R)^{\varepsilon - 1} = 1$$
$$\Rightarrow \quad W_i \varepsilon (W_i - W_R)^{-1} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{W_i \varepsilon}{W_i - W_R} = 1$$
$$\Rightarrow \quad W_i \varepsilon = W_i - W_R$$
$$\Rightarrow \quad W_i (1 - \varepsilon) = W_R$$
$$\Rightarrow \quad W_i = \frac{W_R}{1 - \varepsilon}$$

  - Kan definere W_R som observert alternativinntekt ved ikke å jobbe for bedrift i, det vil si et vektet snitt av økonomiens lønnsnivå $\overline{W}$ og offentlige stønader B til de arbeidsledige. Arbeidsledighetsraten $\frac{U}{N}$ benevnes som u:

$$W_R = (1 - u)\overline{W} + uB = \overline{W}\left(1 - u + \frac{B}{\overline{W}} u\right) = \overline{W}(1 - u + \beta u)$$

    der den relative trygden er $0 < \beta \equiv \frac{B}{\overline{W}} < 1$

  - Antar at alle bedrifter tilpasser seg som bedrift i, det vil si at $W_i = \overline{W}$:

$$W_i = \frac{W_R}{1 - \varepsilon}$$
$$\Rightarrow \quad \overline{W} = \frac{\overline{W}(1 - u + \beta u)}{1 - \varepsilon}$$
$$\Rightarrow \quad 1 - \varepsilon = 1 - u + \beta u$$
$$\Rightarrow \quad (1 - \beta) u = 1 + \varepsilon - 1$$
$$\Rightarrow \quad u \equiv u^* = \frac{\varepsilon}{1 - \beta} > 0$$

  - Konklusjoner av modellen:

- Effektivitetslønnsmodellen gir likevekt med ledighet til tross for fleksibel lønn.
- En sterk ”froskehoppeffekt” (ε) gir bedriftene insentiver til å øke lønnen, fordi dette medfører økt innsats.
- Økt B gir økt arbeidsledighet på både kort og lang sikt hvis ikke bedriftene samtidig byr opp lønnen.
- Merk: Unge arbeidstakere har høyere turnover enn eldre arbeidstakere (høyere ε), og dermed større ledighet.

- Case: Eksogent produktivitetssjokk: $dA > 0$
  - Kort sikt:
    - Ser av $\frac{W_i}{E_i} e_{W_i} = 1$ at lønnen er uendret.
    - Imidlertid ser vi av $F_L = \frac{1}{P_i A e_{W_i}}$ at sysselsettingen øker.
  - Lang sikt:
    - Uendret ledighet og sysselsetting.
    - Økt reallønn.

2B. Fagforeninger (Heijdra kap. 7)

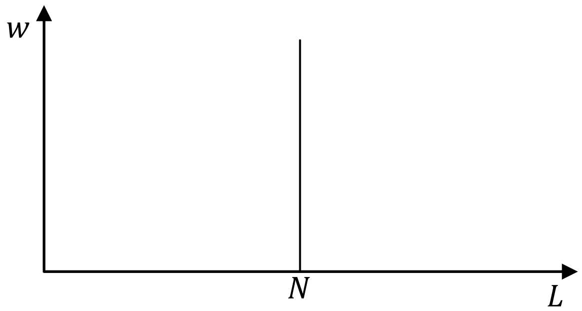
- Antar produktprisen $P = 1$ slik at reallønnen er $\frac{W}{P} = W = w$
- Grunnmodellen:
  - Fagforeningen:
    - Preferanser: $V(w, L) = \frac{L}{N} u(w) + \left(1 - \frac{L}{N}\right) u(B)$

      der

      $$V_w = \frac{L}{N} u_w > 0$$

      $$V_L = \frac{1}{N} u(w) - \frac{1}{N} u(B) = \frac{1}{N}\big(u(w) - u(B)\big) > 0$$

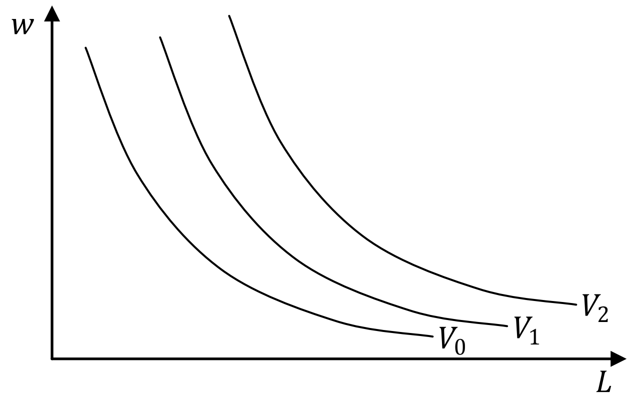
    - Fagforeningens arbeidskrafttilbud:



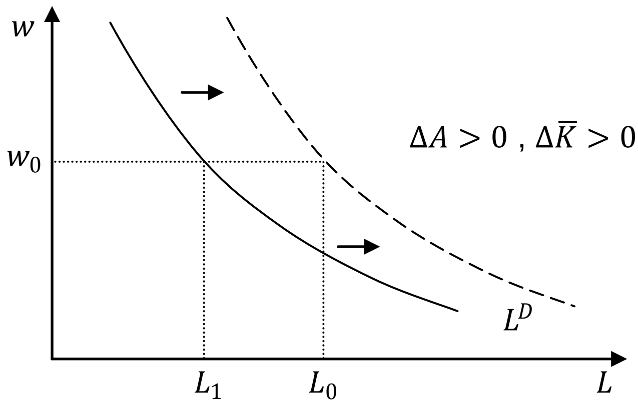
    - Indifferenskurver:

      $$dV = \frac{L}{N} u_w dw + \frac{1}{N}\big(u(w) - u(B)\big) dL = 0$$

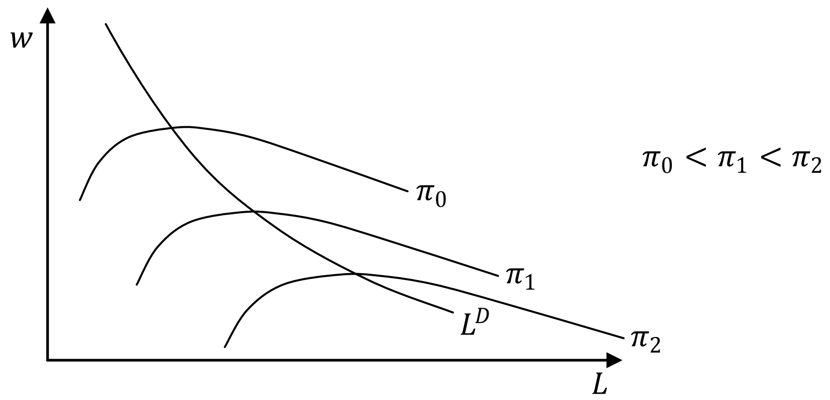
$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dw}{dL}\right|_{V=\overline{V}} = -\frac{u(w)-u(B)}{Lu_w} < 0 \quad \text{gitt at } u(w)-u(B) > 0$$



- Bedrifter:
  - Produktfunksjon: $Y = AF(L,\overline{K})$
  - Profittmaksimerende tilpasning for bedriften med hensyn på sysselsetting:
    $\pi = AF(L,\overline{K}) - wL$
    (1) $\quad \pi_L = AF_L - w = 0$
    Av (1):
    $$F_L = w\frac{1}{A}$$
    $$\Rightarrow \quad L^D = L^D(w, A, \overline{K})$$



  - Isoprofittkurver:
    $d\pi = \pi_w dw + \pi_L dL = 0$
    $$\Rightarrow \quad \left.\frac{dw}{dL}\right|_{\pi=\overline{\pi}} = -\frac{\pi_L}{\pi_w} = \frac{AF_L - w}{L}$$
    Til venstre for etterspørselskurven: $\pi_L = AF_L - w > 0$
    $$\Rightarrow \quad \left.\frac{dw}{dL}\right|_{\pi=\overline{\pi}} > 0$$
    Til høyre for etterspørselskurven: $\pi_L = AF_L - w < 0$
    $$\Rightarrow \quad \left.\frac{dw}{dL}\right|_{\pi=\overline{\pi}} < 0$$



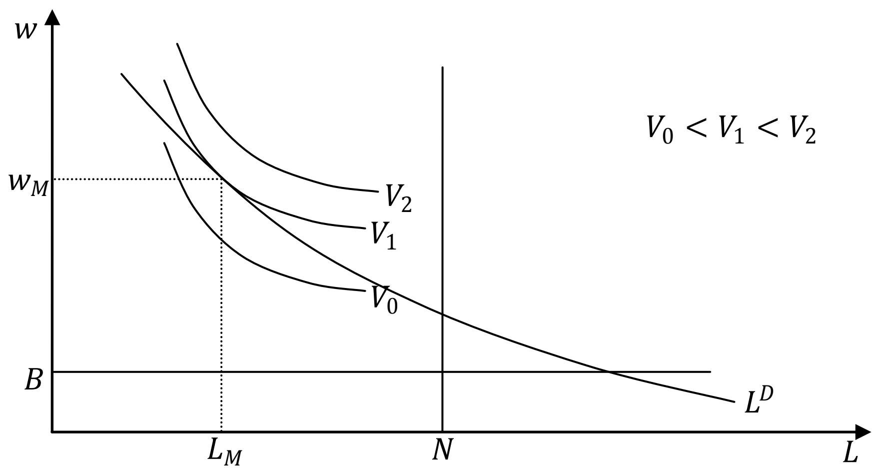
- Modell 1: Monopolistisk fagforening
  - Prosess: Fagforeningen bestemmer lønn og tar etterfølgende sysselsetting for gitt. Deretter bestemmer bedriften sysselsetting.
  - Fagforeningens maksimeringsproblem: $max_w\, V(w, L) = max_w\, V\left(w, L^D(w, A, \bar{K})\right)$

    $\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial w} = V_w + V_L L_w^D = 0$

    $\Rightarrow \quad \frac{V_w}{V_L} = -L_w^D$
  - Tangering:
    - Helning på indifferenskurven: $-\frac{V_L}{V_w}$
    - Helning på L^D: $\frac{1}{L_w^D}$

      $\Rightarrow \quad \frac{V_w}{V_L} = -L_w^D$

      $\Rightarrow$ Indifferenskurvens stigningstall er lik etterspørselsfunksjonens stigningstall. Gjelder kun ved tilstrekkelig stor arbeidskraftetterspørsel og tilstrekkelig lav arbeidsledighetstrygd. Ellers får vi hjørneløsning.



  - Illustrasjon av reallønnsrigiditet under monopolistisk fagforening:

$$\frac{V_w}{V_L} = -L_w^D$$

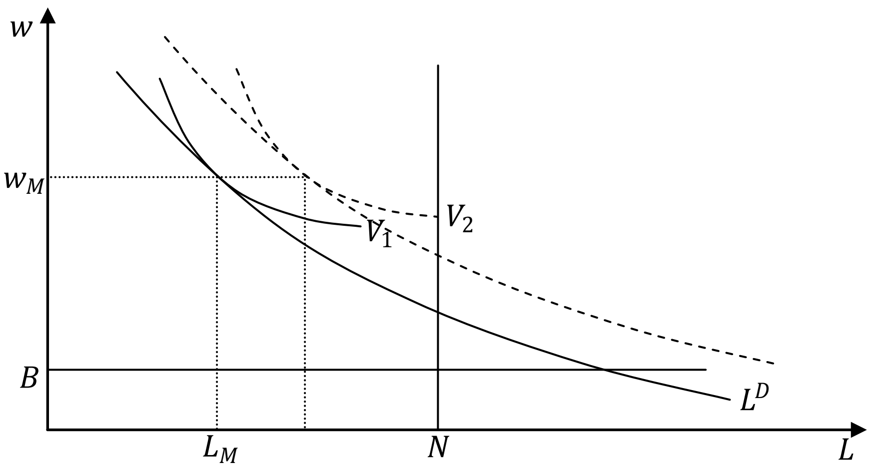
$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{L}{N}u_w}{\frac{1}{N}(u(w)-u(B))} = -L_w^D$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u(w)-u(B)}{Lu_w} = -\frac{1}{L_w^D}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u(w)-u(B)}{wu_w} = -\frac{1}{\frac{w}{L}L_w^D} \equiv \frac{1}{\varepsilon_D}$$

Forståelse: Med gitt konstant etterspørselselastisitet ε_D har vi nå én ligning til å determinere w. Ser at w ikke påvirkes av A; dermed reallønnsrigiditet.

- Case: $dA > 0$:
  - Gir positivt skift i L^D:



  - Passer fint i forhold til empiriske fakta: Gir store skift i sysselsettingen og små skift i lønn.

- Modell 2: Styringsrettmodellen (RTM)
  - Prosess: Fagforeningen og bedriften fremforhandler lønn. Deretter bestemmer bedriften sysselsetting. Utfallet avhenger av partenes relative forhandlingsmakt.
  - Nash' forhandlingsløsning:

$$\max_w \left[\left(V(w, L^D(w, A, \bar{K}) - \bar{V})\right)^{\lambda}\left(\pi\left(w, L^D(w, A, \bar{K})\right) - \bar{\pi}\right)^{1-\lambda}\right]$$

På logistisk form:

$$\max_w \Omega = \left[\lambda\, ln\left(V(w, L^D(w, A, \bar{K}) - \bar{V})\right) + (1-\lambda)\, ln\left(\pi\left(w, L^D(w, A, \bar{K})\right) - \bar{\pi}\right)\right]$$

under betingelsen $\pi_L(w, A, \bar{K}) = 0$, der $\bar{V} = u(B)$. Førsteordensbetingelsen gir:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial w} = \lambda\frac{1}{V-\bar{V}}(V_w + V_L L_w^D) + (1-\lambda)\frac{1}{\pi-\bar{\pi}}(\pi_w + \pi_L L_w^D) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda\frac{1}{V-\bar{V}}(V_w + V_L L_w^D) = -(1-\lambda)\frac{1}{\pi-\bar{\pi}}(\pi_w + \pi_L L_w^D)$$

Setter inn for:

(1) $\quad V_w + V_L L_w^D = \frac{L}{N}u_w + \frac{1}{N}\left(u(w)-u(B)\right)L_w^D = \frac{L}{wN}\left(wu_w - \varepsilon_D\left(u(w)-u(B)\right)\right)$

(2) $\quad \pi_w + \pi_L L_w^D = \pi_w = -L \qquad (\pi_L = 0)$

(3) $V - \bar{V} = \frac{L}{N}u(w) + \left(1 - \frac{L}{N}\right)u(B) - u(B) = \frac{L}{N}\left(u(w) - u(B)\right)$

(4) $\pi - \bar{\pi} = Y - wL - \bar{\pi}$

Dette gir:

$$\lambda \frac{1}{\frac{L}{N}(u(w)-u(B))}\left(\frac{L}{wN}\left(wu_w - \varepsilon_D\left(u(w) - u(B)\right)\right)\right) + (1-\lambda)\frac{1}{Y-wL-\bar{\pi}}(-L) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \frac{\frac{1}{w}\left(wu_w - \varepsilon_D\left(u(w)-u(B)\right)\right)}{u(w)-u(B)} = \frac{(1-\lambda)L}{Y-wL-\bar{\pi}}$$

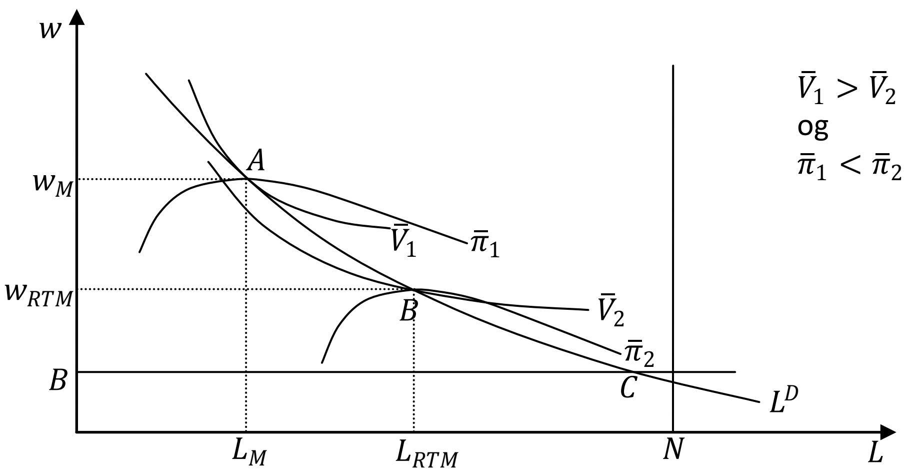
$$\Rightarrow \quad \frac{wu_w - \varepsilon_D\left(u(w)-u(B)\right)}{u(w)-u(B)} = \frac{(1-\lambda)wL}{\lambda(Y-wL-\bar{\pi})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{wu_w}{u(w)-u(B)} = \varepsilon_D + \frac{(1-\lambda)wL}{\lambda(Y-wL-\bar{\pi})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u(w)-u(B)}{wu_w} = \frac{1}{\varepsilon_D + \frac{(1-\lambda)wL}{\lambda(Y-wL-\bar{\pi})}} = \frac{1}{\varepsilon_D + \phi}$$

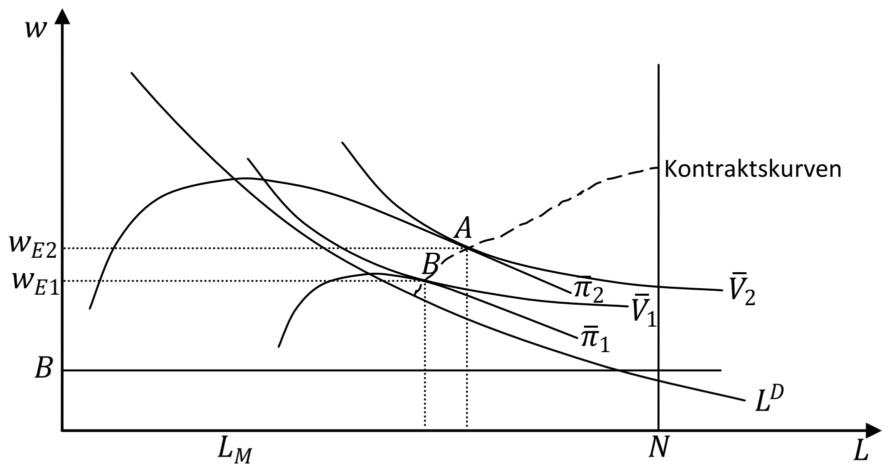
der $\phi \equiv \frac{(1-\lambda)wL}{\lambda(Y-wL-\bar{\pi})}$

- Konklusjon:
  - Ser at forhandlingsrettmodellen gir lavere utbytte for fagforeningen så lenge $\phi > 0$, det vil si så lenge $\lambda < 1$ (for eksempel i B). Hvis fagforeningen har all forhandlingsmakt er $\lambda = 1$, og forhandlingsrettmodellen gir samme løsning som under monopolistisk fagforening (punkt A).
  - Dersom $\lambda = 0$ har bedriften all makt, og $w = B$ (punkt C).
  - Grafisk ser vi at forhandlingsrettmodellen gir lavere reallønn og høyere sysselsetting:



  - Problem med forhandlingsrettmodellen: Ser av grafen over at løsningen (tilpasning i B) ikke er effisient. Det er punkter over $\bar{V}_2$ under $\bar{\pi}_2$ der begge partene hadde vært mer fornøyde.
- Modell 3: Effektivitetsforhandlinger
  - Maksimeringsproblemet ligner det under forhandlingsrettmodellen, men forhandlingene mellom fagforening og bedrift går over både lønn og sysselsetting.
  - Her må ikke løsningen ligge på L^D.

- Nash' forhandlingsløsning:
  $\underset{w,L}{max}\left[(V(w,L)-\bar{V})^{\lambda}(\pi(w,L)-\bar{\pi})^{1-\lambda}\right]$
  På logistisk form:
  $\underset{w,L}{max}\,\Omega = [\lambda\, ln(V(w,L)-\bar{V}) + (1-\lambda)\, ln(\pi(w,L)-\bar{\pi})]$
  (1) $\frac{\partial\Omega}{\partial w} = \lambda\frac{1}{V-\bar{V}}V_w + (1-\lambda)\frac{1}{\pi-\bar{\pi}}\pi_w = 0$
  (2) $\frac{\partial\Omega}{\partial L} = \lambda\frac{1}{V-\bar{V}}V_L + (1-\lambda)\frac{1}{\pi-\bar{\pi}}\pi_L = 0$
  Deler (2) på (1) og får:
  $\frac{V_L}{V_w} = \frac{\pi_L}{\pi_w}$
  der
  $\frac{V_L}{V_w}$ er hellningen på fagforeningens indifferenskurve og
  $\frac{\pi_L}{\pi_w}$ er hellningen på bedriftens isoprofittkurve
- Tilpasningen ved effektivitetsforhandlinger innebærer at indifferenskurven og isoprofittkurven må tangere hverandre.
- Grafisk:



- Desto større forhandlingsmakt hos fagforeningen (større λ), desto høyere lønn og sysselsetting.
- Forskjell fra RTM: Økt forhandlingsmakt (λ) for fagforeningen gir økt sysselsetting og lavere lønn under RTM, men både økt lønn og økt sysselsetting ved effektivitetsforhandlinger.
- Utledning av stigende kontraktskurve: Setter inn i $\frac{V_L}{V_w} = \frac{\pi_L}{\pi_w}$ for:
  - $V_L = \frac{u(w)-u(B)}{N}$
  - $V_w = \frac{L}{N}u_w$
  - $\pi_L = AF_L - w$
  - $\pi_w = -L$

$\frac{V_L}{V_w} = \frac{\pi_L}{\pi_w}$

$\Rightarrow \quad \frac{\frac{u(w)-u(B)}{N}}{\frac{L}{N}u_w} = \frac{AF_L - w}{-L}$

$\Rightarrow \quad \frac{u(w)-u(B)}{Lu_w} = \frac{AF_L - w}{-L}$

$\Rightarrow \quad u(w) - u(B) + (AF_L - w)u_w = 0$

Differensierer med hensyn på L og w:

$u_w dw + (AF_{LL}dL - dw)u_w + (AF_L - w)u_{ww} dw = 0$

$\Rightarrow \quad (u_w - u_w + (AF_L - w)u_{ww})dw + AF_{LL}u_w dL = 0$

$\Rightarrow \quad (AF_L - w)u_{ww} dw = -AF_{LL}u_w dL$

$\Rightarrow \quad \frac{dw}{dL} = -\frac{AF_{LL}u_w}{(AF_L - w)u_{ww}} > 0$

$\Rightarrow$ Altså positiv sammenheng mellom sysselsetting og lønn langs kontraktskurven, det vil si stigende kontraktskurve.

- Problem med effektivitetslønnsforhandlinger: I realiteten observeres kun forhandlinger over lønn, ikke sysselsetting.

3. Dynamisk makromodellering

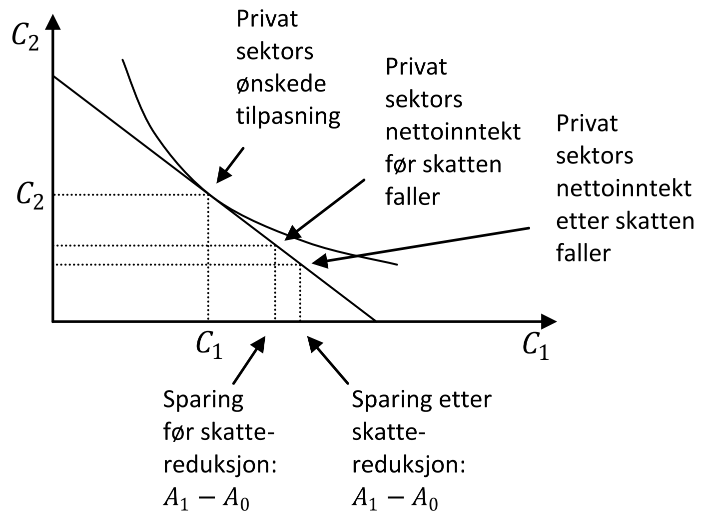
3A. Ricardiansk ekvivalens (Heijdra kap. 5)

- Ricardiansk ekvivalens: Offentlige budsjettunderskudd (skattekutt eller økte offentlige utgifter) endrer ikke allokeringen av livstidskonsumet på grunn av forventninger om at dagens ekspansive finanspolitikk må finansieres gjennom fremtidig skatteøkning.
- Toperiodemodellen:
  - Husholdninger:
    Finansformue A_t etter periode $t = \{1,2\}$:
    (1) $A_1 = (1+r)A_0 + (1-t_1)Y_1 - C_1$
    (2) $A_2 = (1+r)A_1 + (1-t_2)Y_2 - C_2 = 0$
    Setter (1) inn i (2) for å finne husholdningenes totale budsjettbetingelse:
    $A_2 = (1+r)\big((1+r)A_0 + (1-t_1)Y_1 - C_1\big) + (1-t_2)Y_2 - C_2 = 0$
    $\Rightarrow \quad (1+r)C_1 + C_2 = (1+r)^2A_0 + (1+r)(1-t_1)Y_1 + (1-t_2)Y_2$
    $\Rightarrow \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r} = (1+r)A_0 + (1-t_1)Y_1 + \frac{(1-t_2)Y_2}{1+r} = (1+r)A_0 + H$
    der $H = (1-t_1)Y_1 + \frac{(1-t_2)Y_2}{1+r}$ er humankapitalen
  - Offentlig sektor:
    Offentlig gjeld B_t etter periode $t = \{1,2\}$:
    (3) $B_1 = (1+r)B_0 + G_1 - t_1Y_1$
    (4) $B_2 = (1+r)B_1 + G_2 - t_2Y_2 = 0$
    Setter (3) inn i (4) for å finne statens totale budsjettbetingelse:
    $B_2 = (1+r)\big((1+r)B_0 + G_1 - t_1Y_1\big) + G_2 - t_2Y_2 = 0$
    $\Rightarrow \quad (1+r)^2B_0 + (1+r)G_1 + G_2 = (1+r)t_1Y_1 + t_2Y_2$
    $\Rightarrow \quad (1+r)B_0 + G_1 + \frac{G_2}{1+r} = t_1Y_1 + \frac{t_2Y_2}{1+r}$
- Løsning av modellen:
  - To aktører, dermed må $|A_i| = |B_i|$ der $i = \{0,1,2\}$
    $\Rightarrow$ Fra den offentlige budsjettbetingelsen:
    $(1+r)B_0 + G_1 + \frac{G_2}{1+r} = t_1Y_1 + \frac{t_2Y_2}{1+r}$
    $\Rightarrow \quad (1+r)B_0 = -G_1 - \frac{G_2}{1+r} + t_1Y_1 + \frac{t_2Y_2}{1+r}$
    $\Rightarrow \quad (1+r)A_0 = -G_1 - \frac{G_2}{1+r} + t_1Y_1 + \frac{t_2Y_2}{1+r}$
    $\Rightarrow$ Setter inn for $(1+r)A_0$ i husholdningenes budsjettbetingelse:
    $$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = (1+r)A_0 + (1-t_1)Y_1 + \frac{(1-t_2)Y_2}{1+r}$$
    $\Rightarrow \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r} = -G_1 - \frac{G_2}{1+r} + t_1Y_1 + \frac{t_2Y_2}{1+r} + (1-t_1)Y_1 + \frac{(1-t_2)Y_2}{1+r}$
    $\Rightarrow \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r} = (t_1 + 1 - t_1)Y_1 - G_1 + \frac{(t_2+1-t_2)Y_2}{1+r} - \frac{G_2}{1+r}$
    $\Rightarrow \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 - G_1 + \frac{Y_2 - G_2}{1+r} \equiv \Omega$

- Forståelse:
  (1) Nåverdien av husholdningenes livstidskonsum determineres av livstidsinntekt og offentlige utgifter.
  (2) Det er netto nåverdi av offentlige utgifter, og dermed netto nåverdi av skatter, som påvirker konsumetterspørselen.
  (3) Skatten påvirker ikke konsumet i noen av periodene, bare sparing og låneopptak.

- Euler-likningen:
  - Livstidsnytte: $V = U(C_1) + \frac{1}{1+\rho} U(C_2)$
  - Antar nå at $U(C_i) = ln\, C_i$:
    Nyttemaksimerende konsumbane:
    $$\mathcal{L} = ln\, C_1 + \frac{1}{1+\rho} ln\, C_2 - \lambda\left(C_1 + \frac{C_2}{1+r} - \bar{\Omega}\right)$$
    (1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{C_1}$
    (2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{C_2} - \lambda \frac{1}{1+r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1+r}{1+\rho}\frac{1}{C_2}$
    Av (1) og (2): $\frac{1}{C_1} = \frac{1+r}{1+\rho}\frac{1}{C_2}$
    $\Rightarrow \quad \frac{C_2}{C_1} = \frac{1+r}{1+\rho}$
    Forståelse: Desto større renteavkastningen på sparing er i forhold til konsumtilbøyeligheten i periode 1, desto mer vil konsumeres i periode 2.
  - Konsum i periode 1 og 2:
    Finner konsum ved følgende likningssystem:
    (1) $\frac{C_2}{C_1} = \frac{1+r}{1+\rho}$
    (2) $C_1 + \frac{C_2}{1+r} = \Omega$
    Av (1): $C_2 = \frac{1+r}{1+\rho} C_1$
    Setter inn i (2):
    $\Rightarrow \quad C_1 = \Omega - \frac{C_2}{1+r} = \Omega - \frac{\frac{1+r}{1+\rho}C_1}{1+r} = \Omega - \frac{C_1}{1+\rho}$
    $\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{1+\rho}\right) C_1 = \Omega$
    $\Rightarrow \quad \frac{2+\rho}{1+\rho} C_1 = \Omega$
    $\Rightarrow \quad C_1 = \frac{1+\rho}{2+\rho} \Omega$
    Dette gir også C_2:
    $\Rightarrow \quad C_2 = \frac{1+r}{1+\rho} C_1 = \frac{1+r}{1+\rho}\frac{1+\rho}{2+\rho} \Omega = \frac{1+r}{2+\rho} \Omega$
  - Sparing periode 1: $S_1 \equiv A_1 - A_0$
    $\Rightarrow \quad S_1 = \big((1+r)A_0 + (1-t_1)Y_1 - C_1\big) - A_0 = rA_0 + (1-t_1)Y_1 - \frac{1+\rho}{2+\rho}\Omega$

- Forståelse: Skatteraten påvirker sparing, men ikke konsum. Ser at $\frac{dS_1}{dt_1} = -Y_1 < 0$, slik at skattereduksjon i periode 1 møtes med tilsvarende høyere sparing. Dette fordi skattereduksjonen i periode 1 forventes finansiert ved skatteøkning i periode 2, dermed brukes privat sparing for å betale den forventede skatteøkningen. Grafisk:



- Skatt som gjør at ricardiansk ekvivalens ikke holder:
  - Nytt utgangspunkt: Husholdningene ønsker ikke bare konsum C_i, men også fritid $(1 - N_i)$. Det betyr at selv om skatten ikke påvirker etterspørselssiden, kan den påvirke tilbudssiden i økonomien, for eksempel arbeidstilbudet N_i.
  - Husholdningenes nyttefunksjon:

$$U(C_i, 1 - N_i) = ln[C_1^{\varepsilon}(1 - N_1)^{1-\varepsilon}] + \frac{1}{1+\rho} ln[C_2^{\varepsilon}(1 - N_2)^{1-\varepsilon}]$$

$$= ln\, C_1^{\varepsilon} + ln(1 - N_1)^{1-\varepsilon} + \frac{1}{1+\rho}[ln\, C_2^{\varepsilon} + ln(1 - N_2)^{1-\varepsilon}]$$

$$= \varepsilon\, ln\, C_1 + (1 - \varepsilon)\, ln(1 - N_1)$$

$$+ \frac{1}{1+\rho}[\varepsilon\, ln\, C_2 + (1 - \varepsilon)\, ln(1 - N_2)]$$

  - Husholdningenes budsjettbetingelse når inntekt er lik arbeidsinntekt: $Y_i = W_i N_i$

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = (1+r)A_0 + (1 - t_1)Y_1 + \frac{(1 - t_2)Y_2}{1+r}$$

$$= (1+r)A_0 + (1 - t_1)W_1 N_1 + \frac{(1 - t_2)W_2 N_2}{1+r}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 - (1 - t_1)W_1 N_1 + \frac{C_2}{1+r} - \frac{(1-t_2)W_2 N_2}{1+r} = (1+r)A_0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 + (1 - t_1)W_1(1 - N_1) + \frac{C_2}{1+r} + \frac{(1-t_2)W_2(1-N_2)}{1+r} = (1+r)A_0 + (1 - t_1)W_1 + \frac{(1-t_2)W_2}{1+r} = \Omega$$

Forståelse: Verdien av samlet konsum og fritid må være lik verdien av samlet formue.

- Nyttemaksimerende konsumbane:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = U(C_i, 1-N_i) - \lambda[&verdien\ av\ samlet\ konsum\ og\ fritid - \overline{\Omega}]\\ &= \varepsilon\, ln\, C_1 + (1-\varepsilon)\, ln(1-N_1)\\ &+ \frac{1}{1+\rho}[\varepsilon\, ln\, C_2 + (1-\varepsilon)\, ln(1-N_2)]\\ &- \lambda\left[C_1 + (1-t_1)W_1(1-N_1) + \frac{C_2}{1+r} + \frac{(1-t_2)W_2(1-N_2)}{1+r} - \overline{\Omega}\right]\end{aligned}$$

Førsteordensbetingelsen:

(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = \varepsilon \frac{1}{C_1} - \lambda = 0$

(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (1-N_1)} = (1-\varepsilon)\frac{1}{1-N_1} - \lambda(1-t_1)W_1 = 0$

(3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = \frac{\varepsilon}{1+\rho}\frac{1}{C_2} - \frac{1}{1+r}\lambda = 0$

(4) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (1-N_2)} = \frac{1-\varepsilon}{1+\rho}\frac{1}{1-N_2} - \lambda\frac{(1-t_2)W_2}{1+r} = 0$

(5) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -C_1 - (1-t_1)W_1(1-N_1) - \frac{C_2}{1+r} - \frac{(1-t_2)W_2(1-N_2)}{1+r} + \overline{\Omega} = 0$

Av (1): $C_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$

Av (2): $1 - N_1 = \frac{1-\varepsilon}{\lambda(1-t_1)W_1}$

Av (3): $C_2 = \frac{\varepsilon(1+r)}{\lambda(1+\rho)}$

Av (4): $1 - N_2 = \frac{(1-\varepsilon)(1+r)}{\lambda(1+\rho)(1-t_2)W_2}$

Av (5) når vi setter inn for (1)-(4):

$$\begin{aligned}\Omega = C_1 + (1-t_1)W_1(1-N_1) &+ \frac{C_2}{1+r} + \frac{(1-t_2)W_2(1-N_2)}{1+r}\\ &= \frac{\varepsilon}{\lambda} + (1-t_1)W_1\frac{1-\varepsilon}{\lambda(1-t_1)W_1} + \frac{1}{(1+r)}\frac{\varepsilon(1+r)}{\lambda(1+\rho)}\\ &+ \frac{(1-t_2)W_2}{(1+r)}\frac{(1-\varepsilon)(1+r)}{\lambda(1+\rho)(1-t_2)W_2}\\ &= \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1-\varepsilon}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda(1+\rho)} + \frac{1-\varepsilon}{\lambda(1+\rho)} = \frac{\varepsilon+1-\varepsilon}{\lambda} + \frac{\varepsilon+1-\varepsilon}{\lambda(1+\rho)}\\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(1+\rho)} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{1+\rho}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1+\rho+1}{1+\rho}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2+\rho}{1+\rho}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1+\rho}{2+\rho}\Omega$

Setter inn i (1)-(4):

(1): $C_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\varepsilon(1+\rho)}{2+\rho}\Omega$

(2): $1 - N_1 = \frac{1-\varepsilon}{\lambda(1-t_1)W_1} = \frac{(1-\varepsilon)(1+\rho)}{(2+\rho)(1-t_1)W_1}\Omega$

(3): $C_2 = \frac{\varepsilon(1+r)}{\lambda(1+\rho)} = \frac{\varepsilon(1+r)}{(1+\rho)}\frac{1+\rho}{2+\rho}\Omega = \frac{\varepsilon(1+r)}{2+\rho}\Omega$

(4): $1 - N_2 = \frac{(1-\varepsilon)(1+r)}{\lambda(1+\rho)(1-t_2)W_2} = \frac{(1-\varepsilon)(1+r)}{(2+\rho)(1-t_2)W_2}\Omega$

- Konklusjoner:

(1) Likningene for konsum er de samme som likningene før, bortsett fra at ε nå inngår. Dersom $\varepsilon = 1$ er likningene de samme som før.

(2) En konstant andel av livstidsformuen av livstidsformuen Ω blir brukt til å kjøpe fritiden $1 - N_i$ for prisen $(1 - t_i)W_i$.

Periode 1 (av (2)):

$$1 - N_1 = \frac{(1-\varepsilon)(1+\rho)}{(2+\rho)(1-t_1)W_1}\Omega \quad \Rightarrow \quad (1 - t_1)W_1(1 - N_1) = \frac{(1-\varepsilon)(1+\rho)}{(2+\rho)}\Omega$$

Periode 2 (av (4)):

$$1 - N_2 = \frac{(1-\varepsilon)(1+r)}{(2+\rho)(1-t_2)W_2}\Omega \quad \Rightarrow \quad (1 - t_2)W_2(1 - N_2) = \frac{(1-\varepsilon)(1+r)}{(2+\rho)}\Omega$$

(3) Tidsprofilen på fritid avhenger av forholdet mellom rente og tidspreferanse, og av tidsprofilen på netto lønn. Kan vise dette ved å dele (4) på (2):

$$\frac{1-N_2}{1-N_1} = \frac{\frac{(1-\varepsilon)(1+r)}{(2+\rho)(1-t_2)W_2}\Omega}{\frac{(1-\varepsilon)(1+\rho)}{(2+\rho)(1-t_1)W_1}\Omega} = \frac{\frac{(1+r)}{(1-t_2)W_2}}{\frac{(1+\rho)}{(1-t_1)W_1}} = \frac{(1+r)}{(1+\rho)}\frac{(1-t_1)W_1}{(1-t_2)W_2}$$

(4) Arbeidstilbudet, og dermed konsumet, avhenger nå av skatten:

$Y_i = W_i N_i = W_i N_i(t_i)$

Siden skatten nå påvirker bruttoinntekten vil generelt sett ikke ricardiansk ekvivalens lenger gjelde.

- Andre begrensninger i modellen - ricardiansk ekvivalens holder ikke dersom:
    - Vi innfører lånerestriksjoner.
    - Husholdningene har en endelig tidshorisont, der ikke alle generasjoner bryr seg om alle generasjoner. Da vil generasjon 1 konsumere mer (i periode 1) hvis den ikke bryr seg om generasjon 2 (som mottar økte skatter i periode 2).
    - Skatt inngår i budsjettbetingelsene, for eksempel hvis skatten omfatter renteinntekter.
    - Privat sektor mangler informasjon eller ikke er rasjonelle.
- Utvidelser og implikasjoner:
    - Offentlige investeringer som gir markedsavkastning kan finansieres med offentlig gjeld uten at det påvirker den private sparingen.
    - Kortsiktighet i offentlige beslutninger vil føre til lave skatter i dag og høye skatter i fremtiden.
    - Det er optimalt med forholdsvis jevne skatter over tid, siden dødvektstapet øker kvadratisk med skatteøkningen.
    - Midlertidige økninger i offentlig konsum, for eksempel på grunn av nedgangskonjunkturer, skal delvis finansieres med økt offentlig underskudd.
    - Permanente økninger i offentlige utgifter burde finansieres med skatteøkninger umiddelbart.
    - Fremtidige reduksjoner i offentlige utgifter burde lede til lavere skatter i dag, fremtidige økninger i offentlige utgifter burde lede til høyere skatter i dag.

3B. Økonomisk vekst (Heijdra kap. 13)

- Store trekk: Solow fikk et gigantisk gjennombrudd på 50-tallet med Solow-modellen, Romer og andre lanserte endogen vekstteori på 80-tallet.
- Stiliserte fakta:
  - Kaldor (1961):
    (SF1) Produksjon per arbeider vokser over tid.
    (SF2) Kapital per arbeider vokser over tid.
    (SF3) Avkastningsraten på kapital er stabil.
    (SF4) Forholdet mellom produksjon og realkapital er stabilt.
    (SF5) Arbeid og kapital mottar en konstant andel av den totale inntekten.
    (SF6) Produktivitetsveksten varierer mye mellom land.
  - Tillegg fra Romer (1989):
    (SF7) Ingen systematisk sammenheng mellom inntektsvekst og inntektsnivå.
    (SF8) Økonomisk vekst kan ikke fullt ut forklares med veksten i innsatsfaktorer, det er en residual med i bildet.
- Solow-Swan-modellen:
  - Produktfunksjon: $Y(t) = F(K(t), L(t), t)$
    - Antar konstant skalautbytte: $Y(t) = F(\lambda K(t), \lambda L(t), t) = \lambda F(K(t), L(t), t)$
    - Produksjon per arbeider: $\lambda = \frac{1}{L(t)}$

      $$y(t) \equiv \frac{1}{L(t)} Y(t) = F\left(\frac{1}{L(t)} K(t), \frac{1}{L(t)} L(t), t\right) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f\big(k(t)\big)$$

      $$\Rightarrow \quad y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)}$$

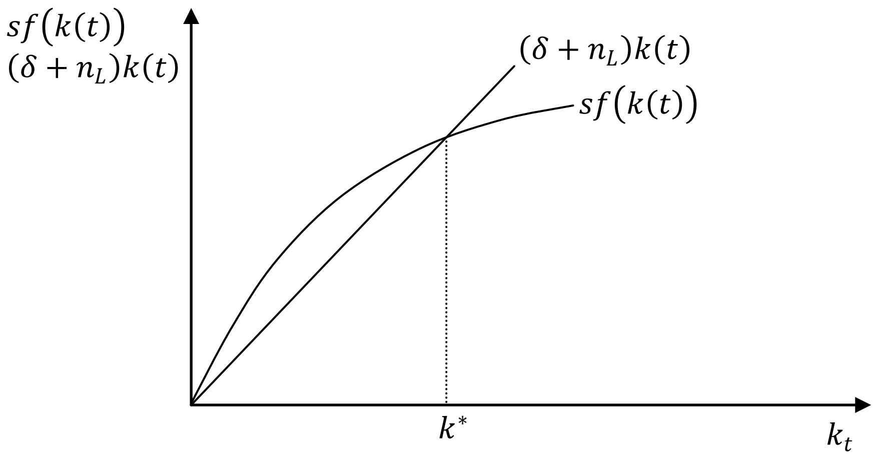
      $$\Rightarrow \quad k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)}$$
  - Økonomisk sirkulasjon: $Y(t) = C(t) + I(t)$
  - Husholdningenes sparerate s: $S(t) = sY(t)$
  - Kapitaldynamikk: $I(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t)$ der $\dot{K}(t) \equiv \frac{dK(t)}{dt}$
  - Sparing er lik brutto realinvestering: $S(t) = I(t)$
  - Konstant befolkningsvekstrate: $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n_L$
- Uten teknologisk fremgang:
  - Kapitalvekst:

    $$I(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t)$$

    $$\Rightarrow \quad \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = S(t) - \delta K(t) = sY(t) - \delta K(t)$$
  - Vekst i kapital per arbeider $k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)}$:

$$\dot{k}(t) \equiv \frac{dk(t)}{dt} = \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{\left(L(t)\right)^2} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$$
$$= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = sy(t) - \delta k(t) - n_L k(t)$$
$$= sf\left(k(t)\right) - (\delta + n_L)k(t)$$

- Grafisk:



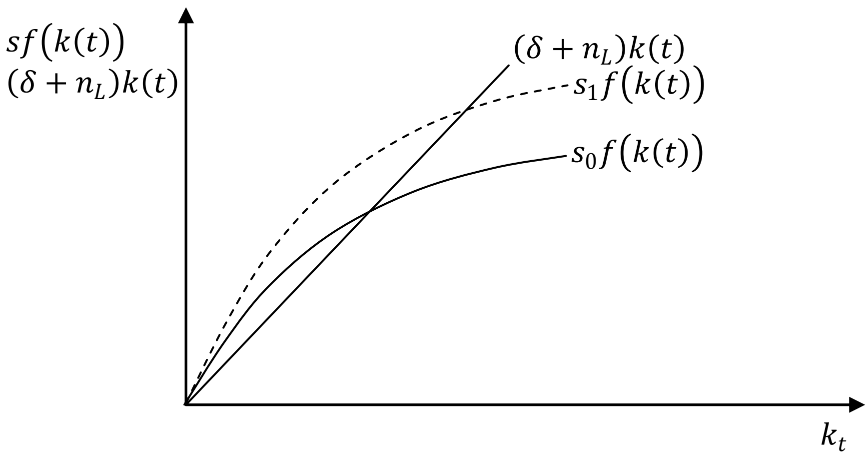
- Steady state: $k(t) = k^*$
  - Ser av grafen at vi har to likevekter, henholdsvis når $k(t) = k^*$ og når $k(t) = 0$. Kun førstnevnte er stabil; selv en kapitalbeholdning som er marginalt større enn null vil drive $k(t)$ opp til k^*.
  - Stabilitetskrav:

    $\left.\frac{d\dot{k}(t)}{dk(t)}\right|_{k(t)=k^*} = sf'\left(k(t)\right) - (\delta + n_L) < 0$ (ser dette av stigningstallet til grafene)

    $\Rightarrow \quad sf'\left(k(t)\right) < \delta + n_L$

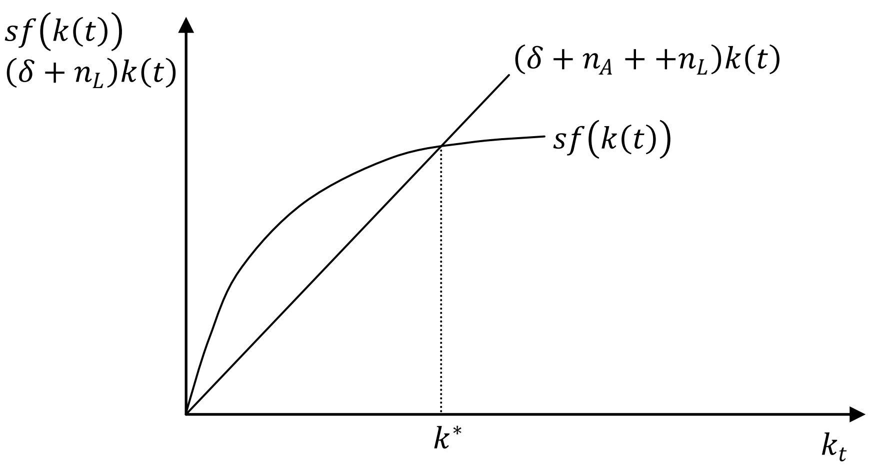
    $\Rightarrow \quad$ Konvergens mot $k(t) = k^*$!
  - Innebærer at stilisert fakta 1 og 2 ikke lenger holder.
  - Innebærer at $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n_L$

    $\Rightarrow \quad \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{I}(t)}{I(t)} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n_L$
  - Case: Endring i spareraten:



    - Fører til økt kapital-arbeider-forhold, men ikke til økt vekstrate langs steady-state-banen. Økt sparing gir altså ikke økt vekst på sikt, bare utvikling langs en parallell vekstbane på et høyere nivå.

- Med teknologisk fremgang:
  - Teknologisk fremgang kan forstås som:
    - Endogen: Fremgang som følger med nye arbeidere eller ny realkapital.
    - Eksogen: Fremgang som ikke avhenger av innsatsfaktorbruken.
  - Effektiv arbeidskraft avhenger av arbeidernes produktivitet og antall arbeidere:
    $N(t) = A(t)L(t)$ der veksten er gitt som $\dot{N}(t) = \dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)$
    $\Rightarrow \quad \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{\dot{A}(t)L(t)+A(t)\dot{L}(t)}{A(t)L(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n_A + n_L$
    der vekstratene er definert ved $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \equiv n_A$ og $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \equiv n_L$
  - Kapitalvekst:
    $I(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t)$
    $\Rightarrow \quad \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = S(t) - \delta K(t) = sY(t) - \delta K(t)$
  - Vekst i kapital per effektive arbeider $k(t) \equiv \frac{K(t)}{N(t)}$:
    $$\dot{k}(t) \equiv \frac{dk(t)}{dt} = \frac{\dot{K}(t)N(t) - K(t)\dot{N}(t)}{\left(N(t)\right)^2} = \frac{\dot{K}(t)}{N(t)} - \frac{K(t)}{N(t)}\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}$$
    $$= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{N(t)} - \frac{K(t)}{N(t)}\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = sy(t) - \delta k(t) - (n_A + n_L)k(t)$$
    $$= sf\left(k(t)\right) - (\delta + n_A + n_L)k(t)$$
  - Grafisk:



  - Vekst i kapital per fysiske arbeider i steady state:
    Tar utgangspunkt i $k(t) \equiv \frac{K(t)}{N(t)} = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$
    $\dot{k}(t) = 0$ innebærer at $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = 0$
    $\Rightarrow \quad \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = n_A > 0$
    $\Rightarrow$ Kapitalmengden per fysiske arbeider vokser over tid med raten n_A.

- Vekst i produksjon per fysiske arbeider i steady state:

  Tar utgangspunkt i $y(t) \equiv \frac{Y(t)}{N(t)} = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}$

  $\dot{y}(t) = 0$ innebærer at $\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = 0$

  $\Rightarrow \quad \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = n_A > 0$

  $\Rightarrow$ Produksjon per fysiske arbeider vokser over tid med raten n_A.

- The golden rule savings rate: Spareraten som maksimerer konsum per arbeider når økonomien er i steady state.
  - Vi skal nå undersøke hvilken sparerate som maksimerer konsum per arbeider i steady state.
  - $k^* = k^*(s)$ er definert ved $sf(k^*) = (\delta + n_A + n_L)k^*$. Skal nå se på hva som skjer med k^* når $ds > 0$ ved å partielldifferensiere k^* med hensyn på s:

    $sf(k^*) = (\delta + n_A + n_L)k^*$

    $\Rightarrow \quad f(k^*) + sf'(k^*)\frac{dk^*}{ds} = (\delta + n_A + n_L)\frac{dk^*}{ds}$

    $\Rightarrow \quad \left(sf'(k^*) - (\delta + n_L)\right)\frac{dk^*}{ds} = -f(k^*)$

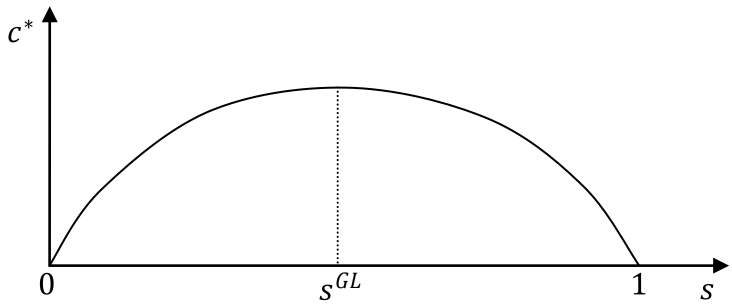
    $\Rightarrow \quad \frac{dk^*}{ds} = \frac{-f(k^*)}{sf'(k^*) - (\delta + n_A + n_L)} > 0$

    $\Rightarrow$ Altså; desto mer sparing, desto mer kapital per arbeider.
  - Konsum:

    $$c(s) = (1-s)f\left(k^*(s)\right) = f\left(k^*(s)\right) - sf\left(k^*(s)\right)$$
    $$= f(k^*(s)) - (\delta + n_A + n_L)\, k^*$$
  - Maksimering av konsum:

    $$\frac{dc(s)}{ds} = f'\left(k^*(s)\right)\frac{dk^*}{ds} - (\delta + n_A + n_L)\frac{dk^*}{ds} = 0$$

    $\Rightarrow \quad f'\left(k^*(s)\right) = \delta + n_A + n_L$
  - Forståelse: Spareraten s^{GL} som maksimerer konsumet i steady state er implisitt gitt ved $f'\left(k^*(s)\right) = \delta + n_A + n_L$. Dette er den optimale spareraten over tid.
  - Grafisk:



  - $s > s^{GL}$:
    - Med redusert sparing i dag ville både dagens og morgendagens konsumenter ville hatt det bedre.
    - Dynamisk ineffesient fordi det vil være paretoeffektivt å redusere spareraten.

- $s < s^{GL}$:
  - Med økt sparing i dag ville både dagens konsumenter hatt det verre, mens morgendagens konsumenter ville hatt det bedre.
  - Dynamisk effisient fordi det ikke er mulig å endre spareraten uten at noen får det verre.

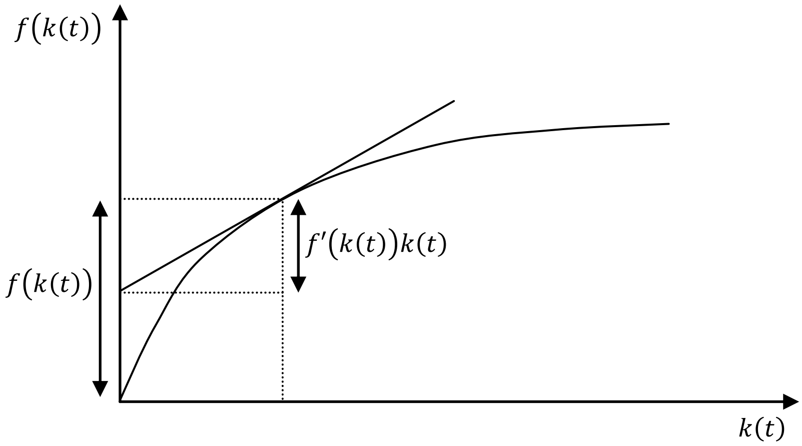
- Tesen om absolutt konvergens:
  - Desto fattigere et land er, desto raskere vokser kapitalmengden, og dermed inntekten. Dermed vil lands velstand konvergere mot hverandre.
  - Konvertering fra absolutt til relativ vekst i kapital per effektive arbeider:

$$\dot{k}(t) = sf\big(k(t)\big) - (\delta + n_A + n_L)k(t) = sf\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_k(t) \equiv \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f\big(k(t)\big)}{k(t)} - (\delta + n)$$

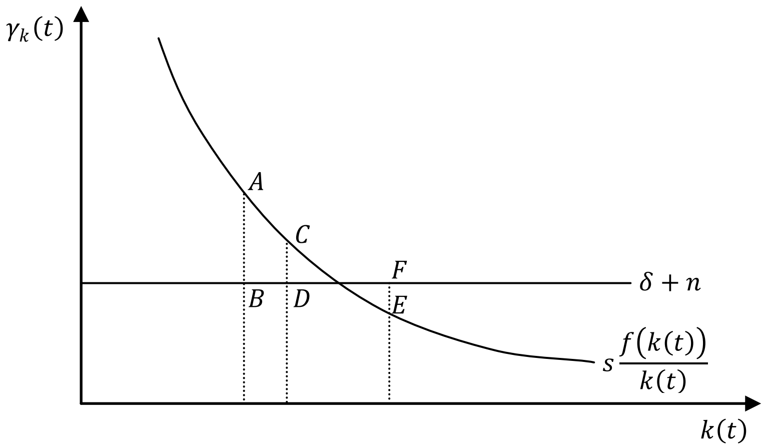
$$\Rightarrow \quad \frac{d\gamma_k(t)}{dk(t)} = s\frac{f'\big(k(t)\big)k(t) - f\big(k(t)\big)}{\big(k(t)\big)^2} < 0$$

fordi



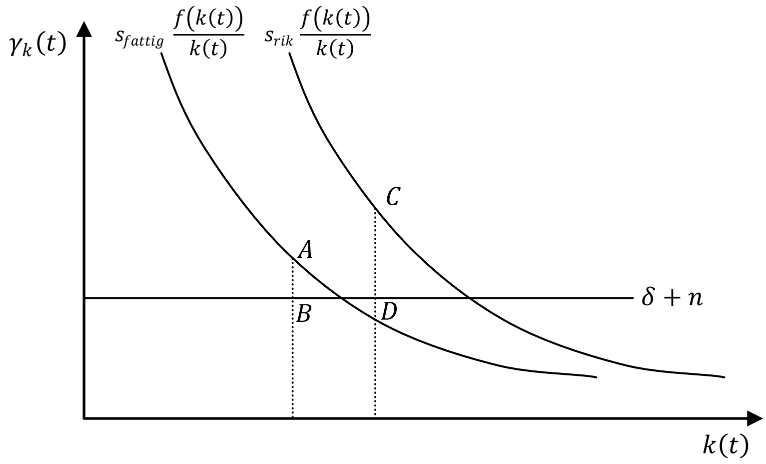
  - Poeng: Desto mer kapital per arbeider, desto lavere relativ vekst i kapital per arbeider.

- Kapitalvekst: $\gamma_k(t) \equiv \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - (\delta + n)$

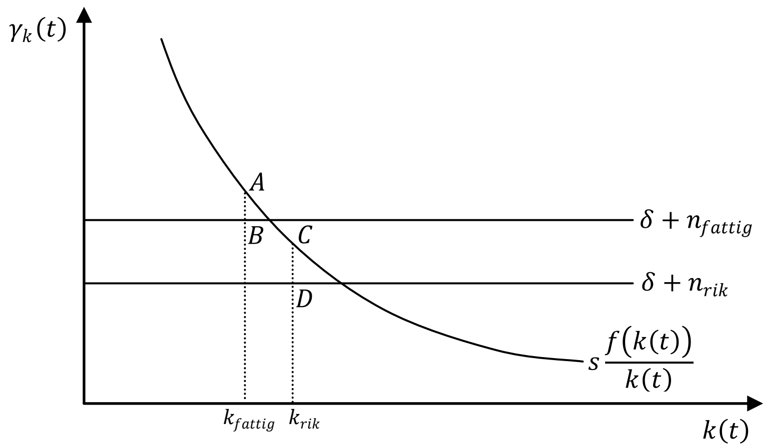


  - Konvergens der fattige land tar igjen rike land.
    - Et veldig fattig land har relativ kapitalvekst lik $A - B$.

        - Et middels fattig land har relativ kapitalvekst lik $C - D$.
        - Et veldig rikt land har relativ kapitalvekst lik $E - F$.
    - Problem: Tesen om absolutt konvergens mangler empirisk støtte!
- Tesen om betinget konvergens:
    - Sentralt poeng: Konvergens skjer kun når land er like på kritiske områder.
    - Eksempel: Anta at rike land sparer mer enn fattige land:



    - Eksempel: Anta at befolkningsveksten er større i fattige land enn i rike land:



    - Tesen om betinget konvergens har langt sterkere empirisk støtte.
- Effekten av finanspolitikk:
    - Keynesmodellen: $Y(t) = C(t) + I(t) + G(t)$
    - Vekst i kapital per effektive arbeider $k(t) \equiv \frac{K(t)}{N(t)}$: $\dot{k}(t)$
        - Utgangspunkt i spare-investeringsbalansen: Offentlige budsjettunderskudd må finansieres av private overskudd av sparemidler etter investeringsutgiftene:
          $G(t) - T(t) = S(t) - I(t)$ der
          (1) $I(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t)$ og
          (2) $S(t) = s\big(Y(t) - T(t)\big)$

$$\Rightarrow \quad G(t) - T(t) = s\big(Y(t) - T(t)\big) - \delta K(t) - \dot{K}(t)$$
$$\Rightarrow \quad \dot{K}(t) = s\big(Y(t) - T(t)\big) - \delta K(t) - G(t) + T(t)$$

- Deler på antall effektive arbeidere:

$$\frac{\dot{K}(t)}{N(t)} = s\frac{Y(t) - T(t)}{N(t)} - \delta\frac{K(t)}{N(t)} - \frac{G(t)}{N(t)} + \frac{T(t)}{N(t)}$$
$$= sy(t) - s\tau(t) - \delta k(t) - g(t) + \tau(t)$$
$$= sf\big(k(t)\big) - \delta k(t) - g(t) + (1-s)\tau(t)$$

- Vekst i kapital per effektive arbeider: Deriverer $k(t) \equiv \frac{K(t)}{N(t)}$ og setter inn for $\frac{\dot{K}(t)}{N(t)}$:

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)N(t) - K(t)\dot{N}(t)}{\big(N(t)\big)^2} = \frac{\dot{K}(t)}{N(t)} - \frac{K(t)}{N(t)}\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}$$
$$= sf\big(k(t)\big) - \delta k(t) - g(t) + (1-s)\tau(t) - nk(t)$$
$$= sf\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t) - g(t) + (1-s)\tau(t)$$

- Vekst i gjeld per effektive arbeider $b(t) \equiv \frac{B(t)}{N(t)}$: $\dot{b}(t)$
  - Utgangspunkt i veksten i offentlig gjeld: $\dot{B}(t) = r(t)B(t) + G(t) - T(t)$

    der likevekt gir $r = f'\big(k(t)\big) - \delta$

    $$\Rightarrow \quad \dot{B}(t) = \big(f'\big(k(t)\big) - \delta\big)B(t) + G(t) - T(t)$$

    - Deler på antall effektive arbeidere:

    $$\frac{\dot{B}(t)}{N(t)} = \big(f'\big(k(t)\big) - \delta\big)\frac{B(t)}{N(t)} - \frac{G(t)}{N(t)} - \frac{T(t)}{N(t)}$$
    $$= \big(f'\big(k(t)\big) - \delta\big)b(t) + g(t) - \tau(t)$$

  - Vekst i gjeld per effektive arbeider: Deriverer $b(t) \equiv \frac{B(t)}{N(t)}$ og setter inn for $\frac{\dot{B}(t)}{N(t)}$:

    $$\dot{b}(t) = \frac{\dot{B}(t)N(t) - B(t)\dot{N}(t)}{\big(N(t)\big)^2} = \frac{\dot{B}(t)}{N(t)} - \frac{B(t)}{N(t)}\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}$$
    $$= \big(f'\big(k(t)\big) - \delta\big)b(t) + g(t) - \tau(t) - nb(t)$$
    $$= \big(f'\big(k(t)\big) - \delta - n\big)b(t) + g(t) - \tau(t)$$

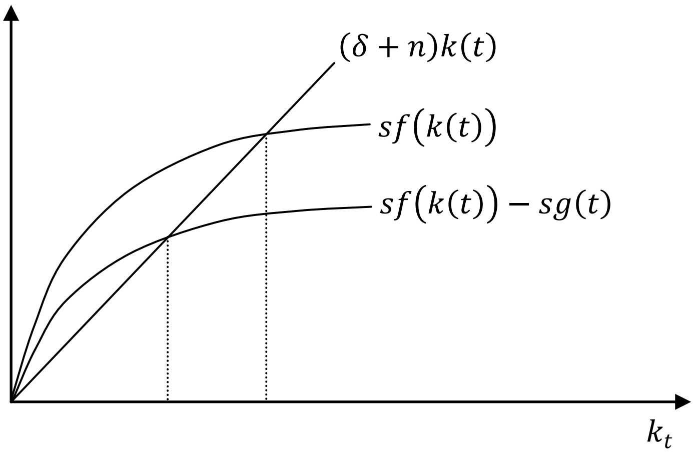
- Skattefinansiert økning i offentlige utgifter:
  - Antar nå:
    - Balansert offentlig budsjett:

    $$\dot{b}(t) = b(t) = 0$$
    $$\Rightarrow \quad g(t) = \tau(t)$$

  - Vekst i kapital per effektive arbeider blir da:

  $$\dot{k}(t) = sf\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t) - g(t) + (1-s)\tau(t)$$
  $$= sf\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t) - g(t) + (1-s)g(t)$$
  $$= sf\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t) - sg(t) < sf\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t)$$

- Grafisk:



  - Hva skjer?
    - Økt offentlig konsum reduserer privat konsum og private investeringer.
    - Dette fører til redusert kapitalmengde og dernest redusert produksjon.
- Effekten på privat konsum:
  - Ser først på effekten på steady state ved å totaldifferensiere:

$$sf(k^*) - (\delta + n)k^* - sg = 0$$
$$\Rightarrow \quad sf(k^*) - sg = (\delta + n)k^*$$
$$\Rightarrow \quad sf'(k^*)dk^* - sdg = (\delta + n)dk^*$$
$$\Rightarrow \quad \big(sf'(k^*) - (\delta + n)\big)dk^* = sdg$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dk^*}{dg} = \frac{s}{sf'(k^*) - (\delta + n)} < 0$$

  - Ser deretter på effekten på konsum:

$$c^* = y^* - \delta - g^* = f(k^*) - \delta - g^*$$
$$\frac{dc^*}{dg} = f'(k^*)\frac{dk^*}{dg} - 1 < -1$$

  - Forståelse: Ved økning i offentlige utgifter (offentlig konsum) reduseres privat konsum med mer enn økningen i offentlige utgifter.
    - Motsatt konklusjon fra Keynes fordi det her er snakk om lang sikt!
    - Men: Ser kun på offentlig konsum, ikke offentlige investeringer.

- Ramsey-modellen:
  - Skiller seg fra Solow-Swan-modellen ved at spareraten her er modellert eksplisitt. Solow-Swan opererte med konstant sparerate.
  - Ramsey: Utgangspunkt i 3 likninger

(1) $\quad \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \sigma(r(t) - n - \rho)$

(2) $\quad \dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - c(t) - (\delta + n)k(t)$

(3) $\quad r(t) = f'\big(k(t)\big) - \delta$

- (1) $\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \sigma(r(t) - n - \rho)$:
  - Toperiodemodell for optimalt konsum: $V = U(C_1) + \frac{1}{1+\rho}U(C_2)$
  - Antar følgende spesifiserte nyttefunksjon ($\sigma \geq 1$):
    $$U(C_i) = \begin{cases} \dfrac{C_i^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1 - \frac{1}{\sigma}} \ gitt\ \sigma > 1 \\ lnC_i\ gitt\ \sigma = 1 \end{cases}$$
  - Budsjettbetingelse: $C_1 + \frac{1}{1+r}C_2 = (1+r)A_0 + H$
    der H er nåverdien av fremtidig inntekt
  - Modifikasjon med hensyn på befolkningsvekst:
    $$C_1 + \frac{1+n}{1+r}C_2 = (1+r)A_0 + H$$
  - Lagrange:
    $$\mathcal{L} = U(C_1) + \frac{1}{1+\rho}U(C_2) - \lambda\left[C_1 + \frac{1+n}{1+r}C_2 - (1+r)A_0 - H\right]$$
    $$= \frac{C_1^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1-\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_2^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1-\frac{1}{\sigma}}$$
    $$-\lambda\left[C_1 + \frac{1+n}{1+r}C_2 - (1+r)A_0 - H\right]$$
    Førsteordensbetingelsen gir:
    (1) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_1} = C_1^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda = 0$
    (2) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_2} = \frac{1}{1+\rho}C_2^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda\frac{1+n}{1+r} = 0$
    Av (1) og (2):
    $$\lambda = C_1^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}C_2^{-\frac{1}{\sigma}}$$
    $\Rightarrow \quad \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}$
    $\Rightarrow \quad ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = ln\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}$
    $\Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma}(lnC_2 - lnC_1) = ln(1+r) - ln(1+n) - ln(1+\rho)$
    $\Rightarrow \quad \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \sigma(r - n - \rho)$
    $\Rightarrow \quad \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \sigma(r(t) - n - \rho)$
- (2) $\dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - c(t) - (\delta + n)k(t)$:
  - Analog til differensiallikningen i Solow-Swan-modellen.
  - Utgangspunkt:
    $Y(t) = C(t) + I(t)$ og
    $I(t) = \delta K(t) + \dot{K}(t)$

$\Rightarrow \quad Y(t) = C(t) + \delta K(t) + \dot{K}(t)$

$\Rightarrow \quad y(t) = c(t) + (\delta + n)k(t) + \dot{k}(t)$

$\Rightarrow \quad \dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - c(t) - (\delta + n)k(t)$

- (3) $\quad r(t) = f'\big(k(t)\big) - \delta$:
  - Standard rentefastsettelse.
- Likningssystemet (1)-(3) er i to dimensjoner og ikke-lineært. Kan løses ved hjelp av et fasediagram:
  - Hvor er $\dot{k}(t) = 0$?

    Utgangspunkt i (2):

    $\Rightarrow \quad \dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - c(t) - (\delta + n)k(t) = 0$

    $\Rightarrow \quad c(t) = f\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t)$

    $\Rightarrow \quad \left.\frac{dc(t)}{dk(t)}\right|_{\dot{k}(t)=0} = f'\big(k(t)\big) - (\delta + n)$

    Vet at:

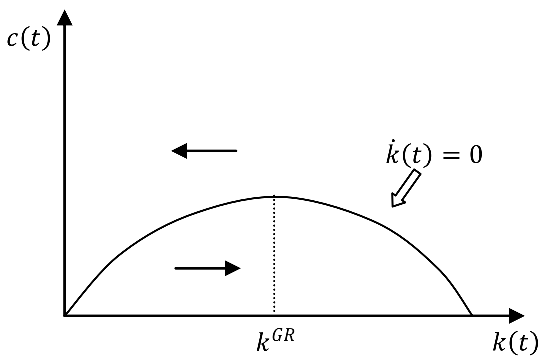
    (1) $\quad k \to 0 \quad \Rightarrow \quad f'\big(k(t)\big) \to \infty \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dc(t)}{dk(t)}\right|_{\dot{k}(t)=0} > 0$

    (2) $\quad k \to \infty \quad \Rightarrow \quad f'\big(k(t)\big) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dc(t)}{dk(t)}\right|_{\dot{k}(t)=0} < 0$

    Vet at dersom vi ligger på $\dot{k}(t) = 0$-kurven er kapitalmengden i ro. Hva om vi ikke ligger på kurven?

    $$\left.\frac{d\dot{k}(t)}{dc(t)}\right|_{\dot{k}(t)=0} = -1 < 0$$

    Dette innebærer at:



  - Hvor er $\dot{c}(t) = 0$?

    Setter inn for (3) i (1):

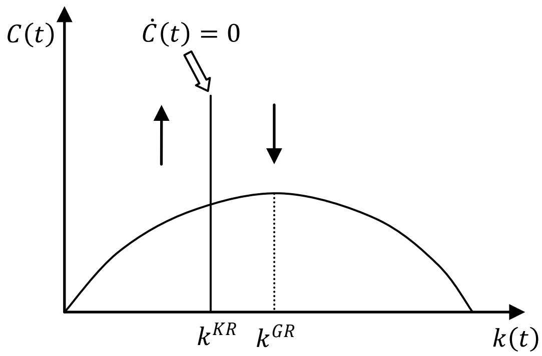
    $$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \sigma(r(t) - n - \rho) = \sigma\big(f'\big(k(t)\big) - \delta - n - \rho\big)$$

    $\Rightarrow \quad \dot{C}(t) = \sigma\big(f'\big(k(t)\big) - \delta - n - \rho\big)C(t) = 0$

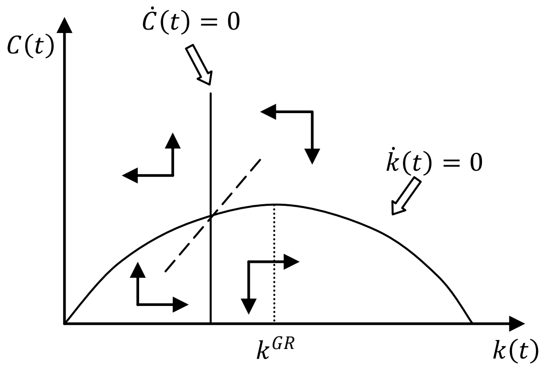
    $\Rightarrow \quad f'\big(k(t)\big) = \delta + n + \rho$

    $\Rightarrow \quad$ Én likning i én variabel $k(t)$. Denne likningen bestemmer en entydig verdi på k som gir $\dot{c}(t) = 0$. Kaller denne for k^{KR}, og ser av $f'\big(k(t)\big) = \delta + n + \rho$ at $k^{KR} < k^{GR}$.

Grafisk:



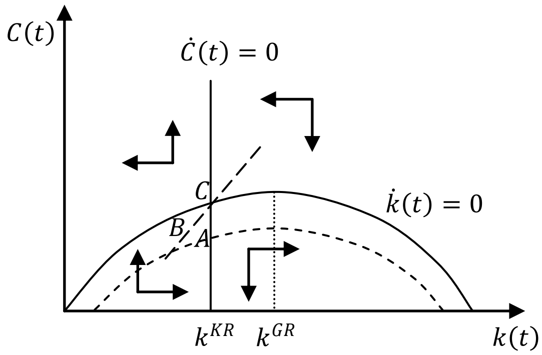
- Samlet har vi altså:



- Er steady staten stabil?
  - Dersom $k < k^{KR}$ er $f'(k)$ høyere enn i steady state. Da er også renta høyere, og konsumet vokser ($\dot{C}(t) > 0$).
  - Dersom $k > k^{KR}$ er $f'(k)$ lavere enn i steady state. Da er også renta lavere, og konsumet faller ($\dot{C}(t) < 0$).
  - Dersom konsumet er høyere enn $\dot{k}(t) = 0$-kurven konsumeres det mye og spares lite; kapitalintensiteten avtar ($\dot{k}(t) < 0$).
  - Dersom konsumet er lavere enn $\dot{k}(t) = 0$-kurven konsumeres det lite og spares mye; kapitalintensiteten vokser ($\dot{k}(t) > 0$).
  - Sadelbanen illustrerer alle punkter som vil gi konvergens direkte mot steady state; alle andre punkter vil konvergere bort fra steady state.
- Sadelpunktstabilitet: Konsumet "hopper" slik at det ligger på sadelbanen, og går deretter mot steady state.
- I steady state er konsumet og kapitalen konstant over tid.
- Steady state har akkurat de samme kvalitative implikasjonene som i Solow-Swan-modellen.

- Finanspolitikk i Ramsey-modellen:

- Kapitaldynamikken: Utgangspunkt i (2):
  - Tidligere: $\dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - c(t) - (\delta + n)k(t) = 0$
    $\Rightarrow \quad c(t) = f\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t)$
  - Nå: $\dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - c(t) - g(t) - (\delta + n)k(t) = 0$
    $\Rightarrow \quad c(t) = f\big(k(t)\big) - g(t) - (\delta + n)k(t)$
  - Grafisk: Konsekvens av at vi innfører $g(t)$:
    - $\dot{k}(t) = 0$-kurven skifter nedover, der den vertikale avstanden mellom gammel og ny kurve er lik $g(t)$.



- Case: Permanent og uventet økning i g: Reduserer konsumet akkurat like mye.
- Case: Midlertidig økning i g: Umiddelbart "hopp" til A, deretter rolig bevegelse til B. Når B idet g reduseres igjen, deretter bevegelse over tid tilbake til C.

3C. Endogen vekstteori (Heijdra kap. 14; Borge & Torvik (1993); Torvik (1997))

- Hovedkonklusjoner i modellene vi har sett på så langt:
  - Langsiktig vekst bestemmes av eksogen befolkningsvekst og eksogen teknologisk fremgang.
  - Økonomisk politikk påvirker ikke økonomiens langsiktige vekstrate.
  - Sparing har ingen implikasjoner for langsiktig økonomisk vekstrate.
  - Endogen vekstteori utfordrer disse konklusjonene.
- Utgangspunkt her:
  - Ønsker å internalisere veksten i A slik som veksten i K.
  - Hovedpoeng: Positive eksterne virkninger og aggregerte stordriftsfordeler kan være en kilde til vedvarende økonomisk vekst.
- AK-modellen:
  - Mikronivå:
    - Antar følgende produktfunksjon for bedrift i:
      $Y_i = AL_i^{\alpha} K_i^{1-\alpha} K^{\beta}$
      der $0 < \alpha < 1$ og $\beta > 0$
    - Notasjonsforklaring:

A Representerer teknologi som ikke har positive eksterne virkninger. Påvirker bare bedrift i.

K Mål for gjennomsnittlig kapital per bedrift i økonomien.

- Hva er K?
  - Forståelse: Det er en fordel for bedrifter å inngå i en økonomi der gjennomsnittlig kapitalnivå er høyt.
  - Aggregert kapitalbeholdning eller kunnskapskapital.
  - Kunnskap: Kan bare delvis patenteres. Derfor vil kunnskapsøkning i bedrift i øke produktiviteten også i andre bedrifter.
  - Erfaring: Learning by doing. Man lærer av å produsere en vare, dermed er erfaring en verdi i K.
  - Har man stor kapitalmengde får man også et rikt industrielt miljø; kapital har positive eksterne virkninger.

- Makronivå:
  - Produksjon:

    $Y = nY_i = nAL_i^{\alpha} K_i^{1-\alpha} K^{\beta} = AL^{\alpha} K^{1-\alpha+\beta}$

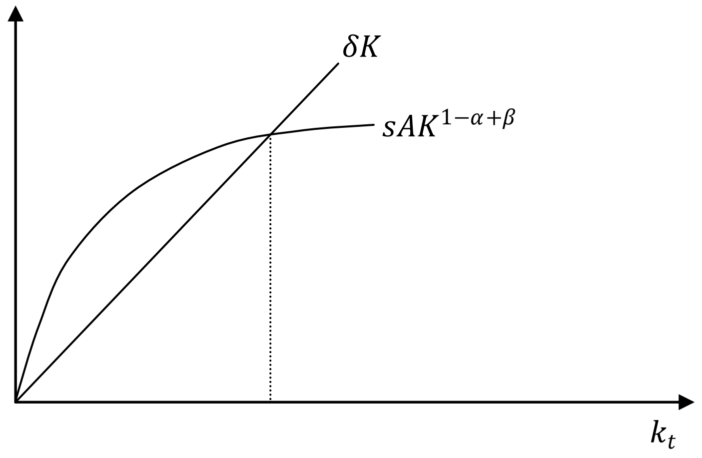
    der

    β er den positive eksterne effekten som overføres mellom bedrifter.

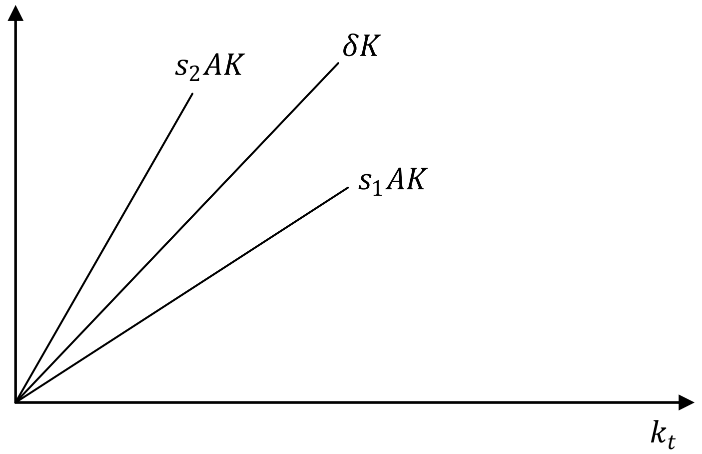
    L er total sysselsetting

    K er total kapitalmengde
- Antagelser som gir nyttige forenklinger i AK-modellen:
  - $L = 1$
  - Ingen teknologisk fremgang; $n_A = 0$
  - Ingen befolkningsvekst; $n_L = 0$
  - Fortsatt kapitalslit; δ
  - Resultatet er produktfunksjonen $Y = AK^{1-\alpha+\beta}$
- Vekst:
  - Antar konstant sparerate s.
  - Fra Solow: $\dot{k}(t) = sf\big(k(t)\big) - (\delta + n)k(t)$
  - Ser nå på $\dot{K}$ siden $n = 0$. Har da at:

    $\dot{K} = sY - \delta K = sAK^{1-\alpha+\beta} - \delta K$
  - Ser at formen på "sparekurven" nå avhenger av eksternaliteten β.
- Tilfelle 1: $1 - \alpha + \beta < 1$
  - Innebærer at $\alpha > \beta$
  - Avtagende grensenytte på kapital.
  - Grafisk:



- Tilfelle 2: $1 - \alpha + \beta = 1$
  - Innebærer at $\alpha = \beta$
  - Produksjonen er lineær i kapitalmengden; $Y = AK^{1-\alpha+\beta} = AK$
  - Grafisk: Antar to forskjellige sparerater der $s_2 > s_1$



  - Forståelse:
    - Lav sparerate viser at kapitalslitet er større enn spareraten, slik at kapitalbeholdningen på lang sikt blir lik null.
    - Høy sparerate viser at kapitalmengden øker også på lang sikt.
    - Ingen av tilfellene har steady state, siden kapitalen enten øker eller synker.
  - Veksten i kapital:
    $\dot{K} = sAK - \delta K$
    $\Rightarrow \quad \frac{\dot{K}}{K} = sA - \delta$
  - Hvis $\frac{\dot{K}}{K} = sA - \delta > 0$:
    - Evigvarende vekst.
    - Veksten er høyere desto høyere spareraten er.
    - Veksten er høyere desto høyere produktiviteten er.
    - Veksten er høyere desto lavere kapitalslitet er.

- Antar Ramsey-konsumenter:

- Maksimerer fremtidig nyttestrøm diskontert med en konstant tidspreferanserate. Antar fortsatt ingen befolkningsvekst.
- Har fra tidligere at dette gir: $\frac{\dot{C}}{C} = \sigma(r - \rho)$
  der r er den privatøkonomiske avkastningen av kapital
- Marginalavkastningen av kapital: $Y_i = AL_i^{\alpha} K_i^{1-\alpha} K^{\beta}$
  $$\frac{dY_i}{dK_i} = (1-\alpha)AL_i^{\alpha} K_i^{-\alpha} K^{\beta} = (1-\alpha)AL_i^{\alpha}\frac{K^{\beta}}{K_i^{\alpha}} = (1-\beta)AL_i^{\alpha}\frac{K^{\beta}}{K_i^{\beta}} = (1-\beta)A$$
  gitt at $\alpha = \beta$, $L_i = 1$, $K = K_i$
  Har da at: $r = (1-\beta)A - \delta$
- Konsumveksten under markedsløsningen er da:
  $$\frac{\dot{C}}{C} = \sigma(r-\rho) = \sigma\big((1-\beta)A - \delta - \rho\big)$$
- Positiv vekst dersom $(1-\beta)A - \delta - \rho > 0$, det vil si dersom:
  - Den eksterne positive effekten $(1-\beta)A$ av kapital er sterk nok.
  - Produktiviteten A er tilstrekkelig høy.
  - Kapitalslitet δ er tilstrekkelig lavt.
  - Konsumentene er tilstrekkelig tålmodige.
- Samfunnsøkonomisk optimal vekst:
  - Fra samfunnets side er produksjonen gitt ved $Y = AK$ der man har tatt hensyn til den eksterne virkningen.
    $\Rightarrow \quad \frac{dY}{dK} = A$
  - Optimal vekst er dermed:
    $$\frac{\dot{C}}{C} = \sigma(r-\rho) = \sigma(A - \delta - \rho) > \sigma\big((1-\beta)A - \delta - \rho\big)$$
  - Forståelse: Markedsøkonomien genererer for lite økonomisk vekst! Mulig argument for offentlig sektor.

- Modell med offentlig sektor:
  - Utgangspunkt: Mye av det offentlig sektor gjør er produktivt. Derfor er det viktig å inkludere offentlig sektor i modellen.
  - Modell med offentlig sektor:
    $Y = AK^{1-\beta}G^{\beta}$
    der $0 < \beta < 1$, altså avtagende grensenytte av både privat og offentlig kapital.
  - Offentlig sektor må finansiere utgifter ved skattlegging: $G = tY$:
    $Y = AK^{1-\beta}(tY)^{\beta}$
    $\Rightarrow \quad Y^{1-\beta} = AK^{1-\beta}t^{\beta}$
    $\Rightarrow \quad Y = A^{\frac{1}{1-\beta}}Kt^{\frac{\beta}{1-\beta}}$
    - Konklusjon: Produktfunksjonen har blitt lineær i K!
    - Intuisjon: For gitt skattesats vil økt privat kapital også gi høyere skatteinntekter, og dermed rom for større offentlige utgifter. Summen av

den direkte og indirekte virkningen av privat kapital medfører at virkningen blir som i en modell som er lineær i privat kapital.

- Av en økning i produksjonen beholder privat sektor en andel $1-t$. Den private marginalproduktiviteten på kapital MPK er således:

$$MPK = (1-t)\frac{dY}{dK} = (1-t)A^{\frac{1}{1-\beta}}t^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

- Skattesatsen som maksimerer den økonomiske veksten:

$$\frac{dMPK}{dt} = A^{\frac{1}{1-\beta}}\left[-t^{\frac{\beta}{1-\beta}} + (1-t)\frac{\beta}{1-\beta}t^{\frac{\beta}{1-\beta}-1}\right] = 0$$

$\Rightarrow \quad -t^{\frac{\beta}{1-\beta}} + \frac{\beta}{1-\beta}t^{\frac{\beta}{1-\beta}-1} - \frac{\beta}{1-\beta}t^{\frac{\beta}{1-\beta}} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{\beta}{1-\beta}t^{\frac{\beta}{1-\beta}-1} - \left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\right)t^{\frac{\beta}{1-\beta}} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{\beta}{1-\beta}t^{-1} - \left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\right) = 0$

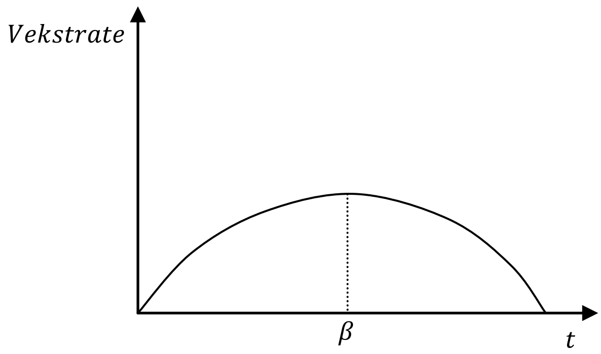
$\Rightarrow \quad \frac{\beta}{1-\beta}t^{-1} = 1+\frac{\beta}{1-\beta}$

$\Rightarrow \quad t^{-1} = \frac{1-\beta}{\beta}\left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\right) = \frac{1-\beta}{\beta} + 1 = \frac{1}{\beta}$

$\Rightarrow \quad t = \beta$

$\Rightarrow$ Intuisjon: Hvis man tror at offentlig sektor er viktig (høy β) er det optimalt med høy skatt. Hvis man ikke tror offentlig sektor er viktig er det optimalt med lav skatt.

- Optimalt skattenivå:



  - Antar initielt lav skatt slik at økt skatt vil gi positive eksterne effekter.
  - Skattesats β er optimal løsning fordi de positive og negative eksterne virkningene av en marginal skatteøkning nøytraliserer hverandre på dette skattenivået.

3D. Overlappende generasjoner (Heijdra kap. 17)

- Overlapping Generations Model (OLG) kan brukes til å analysere:
  - Fordeling mellom generasjoner

  - Pensjoner
  - Demografiske sjokk
- Til forskjell fra modellene frem til nå er produksjonen tilbudsdeterminert. Tidshorisonten er langsiktig med pensjoner og demografiske sjokk (aldring).
- Husholdninger:
  - Overlappende generasjoner:
    - Periode t: Ung generasjon; arbeider konsumerer og sparer.
    - Periode $t+1$: Gammel generasjon; konsumerer.

	Levetid			
Født	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$
t	√	√		
$t+1$		√	√	
$t+2$			√	√

  - Nyttefunksjon: $V_t = u(C_t^Y) + \frac{1}{1+\rho}u(C_{t+1}^O)$ der $u' > 0$ og $u'' < 0$
  - Budsjettbetingelser:

    Periode 1: $W_t = C_t^Y + S_t$

    Periode 2: $C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1})S_t \quad \Rightarrow \quad S_t = \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}}$

    Konsolidert budsjettbetingelse der livstidsinntekten er W_t:

    $\Rightarrow \quad W_t = C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}}$
  - Nyttemaksimerende tilpasning:

$$\mathcal{L} = u(C_t^Y) + \frac{1}{1+\rho}u(C_{t+1}^O) - \lambda\left(C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} - W_t\right)$$

(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t^Y} = u'(C_t^Y) - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = u'(C_t^Y)$

(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+1}^O} = \frac{1}{1+\rho}u'(C_{t+1}^O) - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}u'(C_{t+1}^O)$

(3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -C_t^Y - \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} + W_t = 0$

(1), (2) og (3) gir tre likninger til å bestemme C_t^Y, C_{t+1}^O og S_t som funksjoner av W_t og r_{t+1}.

Av (1) og (2): $\frac{u'(C_{t+1}^O)}{u'(C_t^Y)} = \frac{1+\rho}{1+r_{t+1}}$

Forståelse: Ser at dersom

a. $r_{t+1} > \rho \quad \Rightarrow \quad u'(C_{t+1}^O) < u'(C_t^Y) \quad \Rightarrow \quad C_{t+1}^O > C_t^Y$

b. $r_{t+1} < \rho \quad \Rightarrow \quad u'(C_{t+1}^O) > u'(C_t^Y) \quad \Rightarrow \quad C_{t+1}^O < C_t^Y$

Merk: ρ er et uttrykk for tålmodigheten

  - Sparing:

    $W_t = C_t^Y + S_t \quad \Rightarrow \quad S_t = W_t - C_t^Y = S(W_t, r_{t+1})$

    $\Rightarrow \quad 0 < S_W < 1$

$dW_t \uparrow \quad \Rightarrow \quad C_t^Y \uparrow$ og $C_{t+1}^O \uparrow$, der $C_{t+1}^O \uparrow$ innebærer at $S_t \uparrow$.

$\Rightarrow \quad S_r \lesseqgtr 0$

Substitusjonseffekt:

$r_{t+1} \uparrow \quad \Rightarrow \quad C_t^Y \downarrow$ og $C_{t+1}^O \uparrow$, der $C_{t+1}^O \uparrow$ innebærer at $S_t \uparrow$.

Inntektseffekt:

$r_{t+1} \uparrow \quad \Rightarrow \quad C_t^Y \uparrow$ og $C_{t+1}^O \uparrow$, der $C_t^Y \uparrow$ innebærer at $S_t \downarrow$.

- Bedrifter:
  - Produktfunksjonen:

    $Y_t = F(K_t, L_t)$ der $F_K^{'} > 0$, $F_L^{'} > 0$, $F_{KK}^{''} < 0$ og $F_{LL}^{''} < 0$

    Antar konstant skalaavkastning og finner produksjon per arbeider:

    $\alpha Y_t = F(\alpha K_t, \alpha L_t)$ der $\alpha = \frac{1}{L_t}$

    $$\Rightarrow \quad y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = f\left(\frac{K_t}{L_t}\right) = f(k_t)$$

    der $y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t}$, $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$, $f_k^{'} > 0$ og $f_{kk}^{''} < 0$
  - Profittmaksimerende tilpasning:

    $\pi_t = F(K_t, L_t) - [(r_t + \delta)K_t + W_t L_t]$

    (1) $\quad \frac{\partial \pi_t}{\partial K_t} = F_K^{'} - (r_t + \delta) = 0$

    (2) $\quad \frac{\partial \pi_t}{\partial L_t} = F_L^{'} - W_t = 0$

    Av (1): $r_t = F_K^{'} - \delta$

    Har allerede sagt at $F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = f\left(\frac{K_t}{L_t}\right)$. Derivasjon på begge sider med hensyn på K_t gir:

    $$\Rightarrow \quad F_K^{'} \frac{1}{L_t} = f_k^{'} \frac{1}{L_t}$$

    $$\Rightarrow \quad F_K^{'} = f_k^{'}$$

    $$\Rightarrow \quad r_t = f_k^{'} - \delta$$

    Av (2): $W_t = F_L^{'}$

    Konstant skalaavkastning gir at $Y = F_L^{'} L + F_K^{'} K$

    $$\Rightarrow \quad F_L^{'} = \frac{Y}{L} - \frac{K}{L} F_K^{'} = y - kF_K^{'} = f(k) - kf_k^{'}$$

    $$\Rightarrow \quad W_t = f(k_t) - k_t f_k^{'}$$
- Markedslikevekt i økonomien:
  - Produksjon:

    $Y_t = C_t + I_t$

    der $\quad C_t = L_{t-1} C_t^O + L_t C_t^Y$

    og $\quad I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$

    $$\Rightarrow \quad Y_t = L_{t-1} C_t^O + L_t C_t^Y + K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

    $$\Rightarrow \quad Y_t + (1-\delta)K_t = K_{t+1} + L_{t-1} C_t^O + L_t C_t^Y$$
  - Kapitalakkumulering og likevekt:

    Kapitalmengden i år $t+1$ er gitt av samlet sparing i år t: $K_{t+1} = S_t L_t$

    $\Rightarrow \quad \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = S_t \frac{L_t}{L_{t+1}}$ der populasjonsveksten er $\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + n$

$\Rightarrow \quad k_{t+1} = S_t \frac{1}{1+n}$

$\Rightarrow \quad (1+n)k_{t+1} = S_t$

$\Rightarrow \quad (1+n)k_{t+1} = S(W_t, r_{t+1})$

$\Rightarrow \quad (1+n)k_{t+1} = S\left[\left(f(k_t) - k_t f'_{k_t}\right), \left(f'_{k_{t+1}} - \delta\right)\right]$

- Differensiering med hensyn på k_t:

$$(1+n)\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = S'_W\left(f'_{k_t} - f'_{k_t} - k_t f''_{k_t}\right) + S_r f''_{k_{t+1}} \frac{dk_{t+1}}{dk_t}$$

$\Rightarrow \quad \left[(1+n) - S_r f''_{k_{t+1}}\right]\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = -S'_W k_t f''_{k_t}$

$\Rightarrow \quad \frac{dk_{t+1}}{dk_t} = -\frac{S'_W k_t f''_{k_t}}{(1+n) - S_r f''_{k_{t+1}}} \lesseqgtr 0$

Fordi: $-S_W k_t f''(k_t) > 0$ og $1 + n - S_r f''(k_{t+1}) \lesseqgtr 0 \qquad (S_r \lesseqgtr 0)$

- Spesialtilfelle med Cobb-Douglas produktfunksjon og logistisk nyttefunksjon:
  - Hensikt med spesialtilfellet: Å presentere en steady state-løsning.
  - Produktfunksjonen:

$$y_t = k_t^{1-\varepsilon_L} \qquad \text{der } 0 < \varepsilon_L = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{Y}{L}} = \frac{L}{Y}F'_L < 1$$

  - Nyttefunksjonen:

$u(x) = \ln x$

$\Rightarrow \quad V_t = \ln C_t^Y + \frac{1}{1+\rho}\ln C_{t+1}^O$

  - Nyttemaksimerende tilpasning:

$$\mathcal{L} = \ln C_t^Y + \frac{1}{1+\rho}\ln C_{t+1}^O - \lambda\left(C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} - W_t\right)$$

(1) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t^Y} = \frac{1}{C_t^Y} - \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{C_t^Y}$

(2) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+1}^O} = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{C_{t+1}^O} - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\frac{1}{C_{t+1}^O}$

(3) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -C_t^Y - \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} + W_t = 0$

(1), (2) og (3) gir tre likninger til å bestemme C_t^Y, C_{t+1}^O og S_t som funksjoner av W_t og r_{t+1}:

Av (1) og (2):

$$\frac{1}{C_t^Y} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\frac{1}{C_{t+1}^O}$$

$\Rightarrow \quad C_{t+1}^O = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}C_t^Y$

Setter inn i (3):

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t$$

$\Rightarrow \quad C_t^Y + \frac{\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}C_t^Y}{1+r_{t+1}} = W_t$

$\Rightarrow \quad C_t^Y + \frac{C_t^Y}{1+\rho} = W_t$

$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{1+\rho}\right) C_t^Y = W_t$

$\Rightarrow \quad \frac{2+\rho}{1+\rho} C_t^Y = W_t$

$\Rightarrow \quad C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho} W_t$

Sparing:

$\Rightarrow \quad S_t = W_t - C_t^Y = W_t - \frac{1+\rho}{2+\rho} W_t = \frac{1}{2+\rho} W_t$

$\Rightarrow$ Sparing er nå uavhengig av rentenivå!

- Profittmaksimerende tilpasning:

  $\pi_t = F(K_t, L_t) - [(r_t + \delta)K_t + W_t L_t]$

  $\Rightarrow \quad r_t = f_{k_t}' - \delta = (1-\varepsilon_L)k_t^{1-\varepsilon_L-1} - \delta = \frac{1-\varepsilon_L}{k_t^{\varepsilon_L}} - \delta$

  $\Rightarrow \quad W_t = f(k_t) - k_t f_{k_t}' = k_t^{1-\varepsilon_L} - k_t(1-\varepsilon_L)k_t^{-\varepsilon_L} = \varepsilon_L k_t^{1-\varepsilon_L}$

- Likevekt:

  $$(1+n)k_{t+1} = S_t = \frac{1}{2+\rho} W_t = \frac{1}{2+\rho} \varepsilon_L k_t^{1-\varepsilon_L}$$

  $\Rightarrow \quad k_{t+1} = \frac{\varepsilon_L}{(2+\rho)(1+n)} k_t^{1-\varepsilon_L} = g(k_t)$

- Grafisk fremstilling av $k_{t+1} = g(k_t) = \frac{\varepsilon_L}{(2+\rho)(1+n)} k_t^{1-\varepsilon_L}$:
  - $g(0) = \frac{\varepsilon_L}{(2+\rho)(1+n)} 0^{1-\varepsilon_L} = 0$

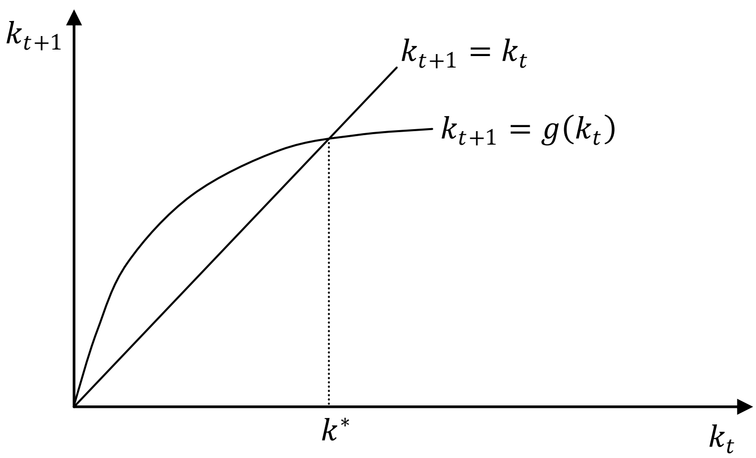
    $\Rightarrow$ Kurven starter i origo
  - $g'(k_t) = \frac{\varepsilon_L(1-\varepsilon_L)}{(2+\rho)(1+n)} k_t^{1-\varepsilon_L-1} = \frac{\varepsilon_L(1-\varepsilon_L)}{(2+\rho)(1+n)} k_t^{-\varepsilon_L} > 0$

    $\Rightarrow$ Positiv helning på kurven
  - $g''(k_t) = -\varepsilon_L \frac{\varepsilon_L(1-\varepsilon_L)}{(2+\rho)(1+n)} k_t^{-\varepsilon_L-1} < 0$

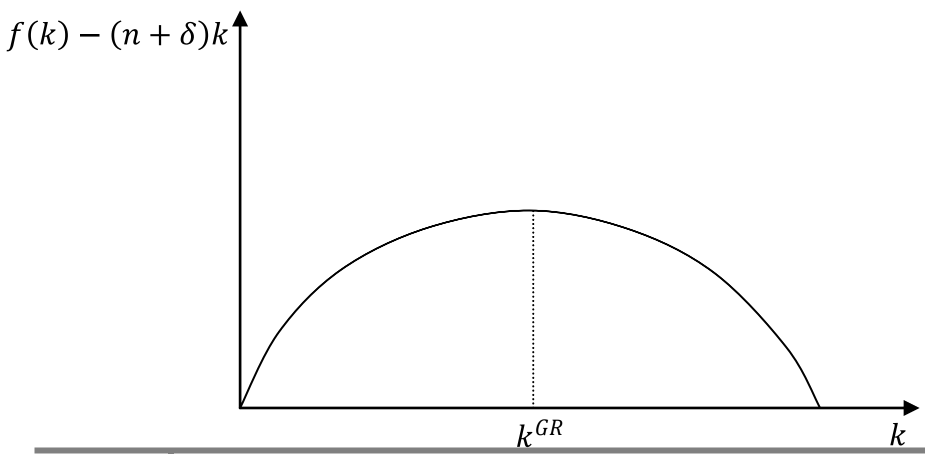
    $\Rightarrow$ Avtagende stigning på kurven
  - $k_t \to 0 \quad \Rightarrow \quad g'(k_t) \to \infty$

    $\Rightarrow$ Tilnærmet vertikal kurve når k_t er nær 0
  - $k_t \to \infty \quad \Rightarrow \quad g'(k_t) \to 0$

    $\Rightarrow$ Tilnærmet horisontal kurve når k_t er nær uendelig
  - Grafisk fremstilling av $k_{t+1} = g(k_t)$:



- Er markedsløsningen effisient steady-state?
  - Samfunnsøkonomisk maksimerende tilpasning (Golde-age-path):
    $max_{C^Y,C^O}\ u(C^Y) + \frac{1}{1+\rho} u(C^O)$ gitt budsjettbetingelsen
    $f(k) - (n+\delta)k = C^Y + \frac{C^O}{1+n}$ til en steady-state-generasjon:
    $$\mathcal{L} = u(C^Y) + \frac{1}{1+\rho} u(C^O) - \lambda\left(C^Y + \frac{C^O}{1+n} - f(k) + (n+\delta)k\right)$$
    (1) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C^Y} = u'(C^Y) - \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = u'(C^Y)$
    (2) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C^O} = \frac{1}{1+\rho} u'(C^O) - \frac{\lambda}{1+n} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1+n}{1+\rho} u'(C^O)$
    (3) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k} = -\lambda\left(-f_k' + (n+\delta)\right) = 0$
    Av (1) og (2): $\frac{u'(C^O)}{u'(C^Y)} = \frac{1+\rho}{1+n}$
    Av (3): $f_k' = n + \delta$
  - Tidligere har vi funnet markedsløsningene:
    $$\frac{u'(C^O)}{u'(C^Y)} = \frac{1+\rho}{1+r}$$
    $f_k' = r + \delta$
    $\Rightarrow$ Ser at hvis $r = n$, er markedsløsningen effisient. Imidlertid ingenting som sikrer at $r = n$!
  - Når $r \neq n$, der $f_k'(k^M) = r + \delta$ og $f_k'(k^{GR}) = n + \delta$:
    - $r < n$
      $\Rightarrow$ $f_k'(k^M) < f_k'(k^{GR})$
      $\Rightarrow$ $k^M > k^{GR}$
      $\Rightarrow$ Dynamisk paretoineffektiv løsning, siden de unge kan forbruke mer i dag og likevel komme bedre ut som gamle i morgen.
    - $r > n$:
      $\Rightarrow$ $f_k'(k^M) > f_k'(k^{GR})$
      $\Rightarrow$ $k^M < k^{GR}$
      $\Rightarrow$ Dynamisk paretoeffektiv løsning, siden de unge ikke kan forbruke mer i dag uten å komme dårligere ut som gamle i morgen.
    - Grafisk:



- Pensjoner i OLG-modellen - Innledende:
  - Så langt har pensjonssparingen vært privat; innfører nå offentlig pensjonssparing: Overføring Z_t til de eldre finansiert av en lump-sumskatt T_t på de unge.
  - Husholdningenes budsjettbetingelser:

    Periode 1: $C_t^Y + S_t = W_t - T_t$

    Periode 2: $C_{t+1}^O = (1 + r_{t+1})S_t + Z_{t+1} \Rightarrow \quad S_t = \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} - \frac{Z_{t+1}}{1+r_{t+1}}$

    $\Rightarrow \quad C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t - T_t + \frac{Z_{t+1}}{1+r_{t+1}}$
  - Skiller mellom to pensjonssystemer:
    - Fully-funded: Den yngre generasjonens skatt finansierer deres fremtidige pensjon, der markedsrenta påvirker forsørgerbyrden:
      $Z_{t+1} = (1 + r_{t+1})T_t$
    - Pay-as-you-go: Den yngre generasjonens skatt finansierer de nåværende gamles pensjon, der den biologiske renta påvirker forsørgerbyrden:
      $Z_t = (1 + n)T_t$
- Fully-funded:
  - Husholdingenes budsjettbetingelse:

    $$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1 + r_{t+1}} = W_t - T_t + \frac{Z_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = W_t - T_t + T_t = W_t$$

    $\Rightarrow$ Uendret budsjettbetingelse!

    $\Rightarrow$ Siden Fully-funded ikke endrer budsjettbetingelsen, endres heller ikke konsumbeslutningene.
  - Sparing:

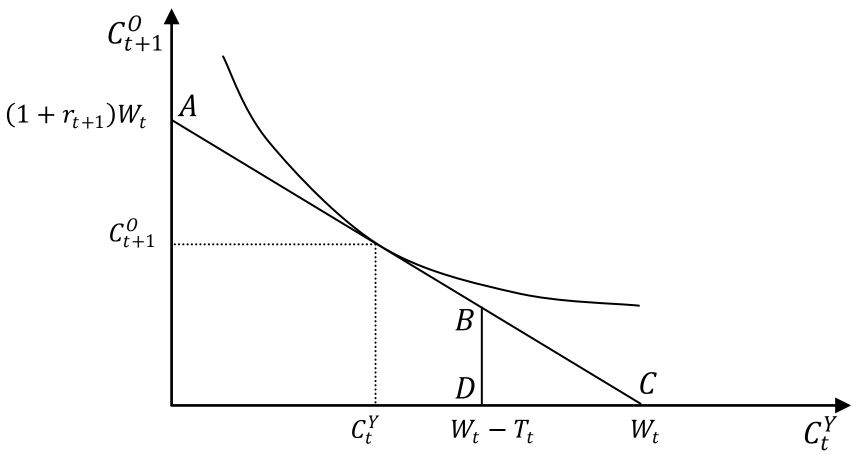
    $C_t^Y + S_t = W_t - T_t$

    $\Rightarrow$ $S_t + T_t = W_t - C_t^Y = S(W_t, r_{t+1})$ der $W_t - C_t^Y$ er total sparing.

    $\Rightarrow$ Ser at $dT_t > 0 \Rightarrow dS_t < 0$ der $dT_t = -dS_t$ slik at $d(T_t + S_t) = 0$.

    $\Rightarrow$ Den totale sparingen påvirkes ikke av pensjonssystemet, det skjer bare en omallokering fra privat til offentlig sparing, der privat sparing reduseres med T_t.

    Grafisk:



(1) Budsjettlinje uten offentlig pensjonssystem: ABC

(2) Budsjettlinje med fully-funded pensjonssystem: ABD

- Kapitaldynamikk:
  Total kapitalbeholdning er summen av akkumulert kapital K_t^i fra husholdninger og offentlig sektor:
  $K_{t+1} = K_{t+1}^H + K_{t+1}^G = L_t S_t + L_t T_t = L_t(S_t + T_t) = L_t S(W_t, r_{t+1})$
  $\Rightarrow \quad \frac{K_{t+1}}{L_t} = S(W_t, r_{t+1})$
  $\Rightarrow \quad \frac{L_{t+1}}{L_t}\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = S(W_t, r_{t+1})$
  $\Rightarrow \quad (1+n)k_t = S(W_t, r_{t+1})$
  $\Rightarrow$ Samme kapitaldynamikk som uten pensjonssystem
  $\Rightarrow$ Spørsmål: Hvorfor da pensjonssystem?

- Pay-as-you-go:
  - Utgangspunkt i PAYG:
    Pensjonen til de gamle er $L_{t-1}Z_t = L_t T_t$
    der $L_{t-1}Z_t$ er pensjonen til de gamle og $L_t T_t$ er pensjonsbelastningen til de unge.
    $\Rightarrow$ er $Z_t = \frac{L_t}{L_{t-1}}T_t = (1+n)T_t$ der $n \equiv \frac{L_t - L_{t-1}}{L_{t-1}}$
  - Holder T fast: $Z = (1+n)T$
  - Husholdingenes budsjettbetingelse:

$$C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t - T_t + \frac{Z_{t+1}}{1+r_{t+1}} = W_t - T + \frac{(1+n)T}{1+r_{t+1}}$$
$$= W_t + \frac{[(1+n)-(1+r_{t+1})]}{1+r_{t+1}}T = W_t + \frac{n-r_{t+1}}{1+r_{t+1}}T$$

    - Ser at budsjettbetingelsen nå er endret med $\frac{n-r_{t+1}}{1+r_{t+1}}T$.
    - Mens r_{t+1} er "market rate of return" er n "biological rate of return".
    - Siden PAYG endrer budsjettbetingelsen endres også konsumbeslutningene.
    - $n > r_{t+1} \quad \Rightarrow \quad$ PAYG utvider konsummulighetene
    - $n < r_{t+1} \quad \Rightarrow \quad$ PAYG reduserer konsummulighetene

- Cobb-Douglaspreferanser og teknologi:
  - Utgangspunkt: $V_t = lnC_t^Y + \frac{1}{1+\rho}lnC_{t+1}^O$
  - Husker fra systemet uten offentlig pensjon at:
    - $C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho}W_t$ og $C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t$
  - Med PAYG:
    - $C_t^Y + \frac{C_{t+1}^O}{1+r_{t+1}} = W_t + \frac{n-r_{t+1}}{1+r_{t+1}}T = \widehat{W}$
      der $\widehat{W} \equiv W_t + \frac{n-r_{t+1}}{1+r_{t+1}}T$
      $\Rightarrow \quad C_t^Y = \frac{1+\rho}{2+\rho}\widehat{W}$
      Altså er $\frac{1+\rho}{2+\rho}\widehat{W}$ et uttrykk for konsumet til de unge.

- Sparing: $C_t^Y + S_t = W_t - T$

$$S_t = W_t - T - C_t^Y = W_t - T - \frac{1+\rho}{2+\rho}\widehat{W} = W_t - T - \frac{1+\rho}{2+\rho}\left(W_t + \frac{n - r_{t+1}}{1 + r_{t+1}}T\right)$$
$$= \frac{(2+\rho)-(1+\rho)}{2+\rho}W_t - \left(1 + \frac{1+\rho}{2+\rho}\frac{n - r_{t+1}}{1 + r_{t+1}}\right)T$$
$$= \frac{1}{2+\rho}W_t - \left(1 + \frac{1+\rho}{2+\rho}\frac{n - r_{t+1}}{1 + r_{t+1}}\right)T \equiv S_t(W_t, r_{t+1}, T)$$

- Av dette gjelder følgende:
  - $S_W = \frac{1}{2+\rho}$

    $\Rightarrow \quad 0 < S_W < 1$
  - $S_r = -\frac{1+\rho}{2+\rho}T\left(\frac{-1(1+r_{t+1})-(n-r_{t+1})}{(1-r_{t+1})^2}\right) = \frac{1+\rho}{2+\rho}T\frac{1+n}{(1-r_{t+1})^2}$

    $\Rightarrow \quad S_r > 0$
  - $S_T = -\left(1 + \frac{1+\rho}{2+\rho}\frac{n-r_{t+1}}{1+r_{t+1}}\right)$

    $\Rightarrow \quad -1 < S_T < 0$ hvis $r_{t+1} > n$

    $\Rightarrow \quad S_T < -1$ hvis $r_{t+1} < n$
- Kapitaldynamikk:
  - Antar at offentlig sektor ikke sparer, altså at kapitalmengden genereres av privat sparing fra den yngre generasjonen:

    $K_{t+1} = L_t S_t(W_t, r_{t+1}, T)$

    $\Rightarrow \quad \frac{K_{t+1}}{L_t} = S_t(W_t, r_{t+1}, T)$

    $\Rightarrow \quad \frac{L_{t+1}}{L_t}\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = S_t(W_t, r_{t+1}, T)$

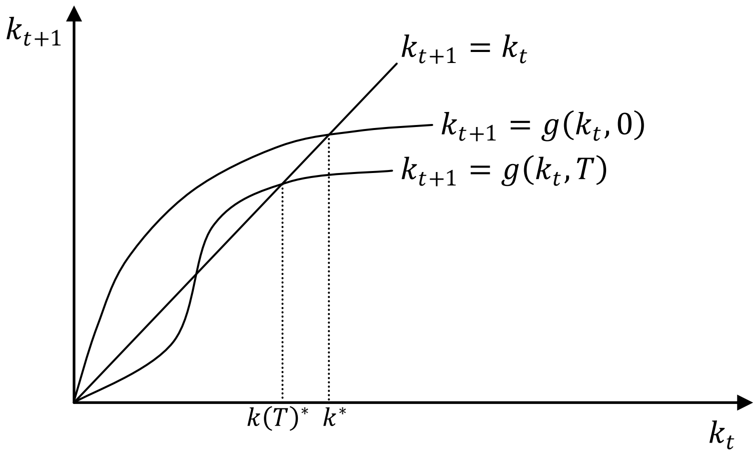
    $\Rightarrow \quad (1+n)k_{t+1} = S_t(W_t, r_{t+1}, T)$
  - Setter videre inn for:
    - $r_{t+1} = f'(k_{t+1}) - \delta$
    - $W_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$

    $\Rightarrow \quad (1+n)k_{t+1} = S_t(W_t(k_t), r_{t+1}(k_{t+1}), T)$
  - Definerer implisitt k_{t+1} som en funksjon av k_t og T:

    $k_{t+1} = g(k_t, T)$
    - $\frac{dr_{t+1}}{dk_{t+1}} = f''(k_{t+1}) < 0$
    - $\frac{dW_t}{dk_t} = f'(k_t) - f'(k_t) - k_t f''(k_t) = -k_t f''(k_t) > 0$
  - Grafisk:

    $(1+n)k_{t+1} = S_t(W_t(k_t), r_{t+1}(k_{t+1}), T)$

    $\Rightarrow \quad k_{t+1} = g(k_t, T)$



- Kapitaldynamikken:
  $k_{t+1} = g(k_t, T)$
  $\Rightarrow \quad (1+n)g_k = S_W W'(k_t) + S_r r'(k_{t+1})g_k$
  $\Rightarrow \quad \big(1+n-S_r r'(k_{t+1})\big)g_k = S_W W'(k_t)$
  $\Rightarrow \quad g_k = \frac{S_W W'(k_t)}{1+n-S_r r'(k_{t+1})} > 0$
- Viktig konklusjon: Et PAYG-system gjør at g-kurven skifter nedover (se graf over). Introduksjon av PAYG reduserer dermed kapitalakkumulasjonen. Steady state med PAYG lavere enn uten offentlig pensjonssystem.

- PAYG:
  - Reduserer kapitalakkumulasjonen, og dermed produksjon per arbeider.
  - Gir en annen løsing enn Fully Funded fordi PAYG reduserer k.
- Skattesystem: Skatt på de unge ($T > 0$), lovnad om pensjon når man blir gammel ($Z > 0$).
- Husholdningenes respons: Sparer mindre som unge.
  - Fully Funded: Myndighetene investerer skatteinntektene, det vil si at de inngår i kapitalmengden.
  - PAYG: Myndighetene sparer skatteinntektene for pensjon, det vil si at de ikke inngår i kapitalmengden.
- Velferdseffekter:
  - Dersom $r > n$: Har da en dynamisk effektiv økonomi; PAYG øker velferden.
  - Dersom $r < n$: Har da en dynamisk ineffektiv økonomi; PAYG reduserer velferden.