Norwegian Business School

2.B AUTOREGRESSIVE PROSESSER

BST 1612 – ANVENDT MAKROØKONOMI MODUL 5

Foreleser: Drago Bergholt

E-post: Drago.Bergholt@bi.no

10. november 2011

INNHOLD

- Autoregressiv prosess av orden p
- Moving average prosess av orden q
- Autoregressiv, moving average prosess av orden (p, q)
- Utregning av momenter

ARMA(p, q)

- Repetisjon: White noise

$$y_t = \varepsilon_t$$

- Antagelser om restleddet:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Altså, gjennomsnittet er null:

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) = 0$$

Ingen seriekorrelasjon:

$$Cov\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}\right) = E\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}\right) = 0$$

Konstant betinget varians:

$$Var(\varepsilon_t) = E\left[\left(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t)\right)\left(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t)\right)\right] = E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2$$

ARMA(p, q)

- Autoregressiv prosess av orden 1; AR(1)

  $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$

  Eksempel: $y_t = 0.9 y_{t-1} + \varepsilon_t$

- Autoregressiv prosess av orden 2; AR(2)

  $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

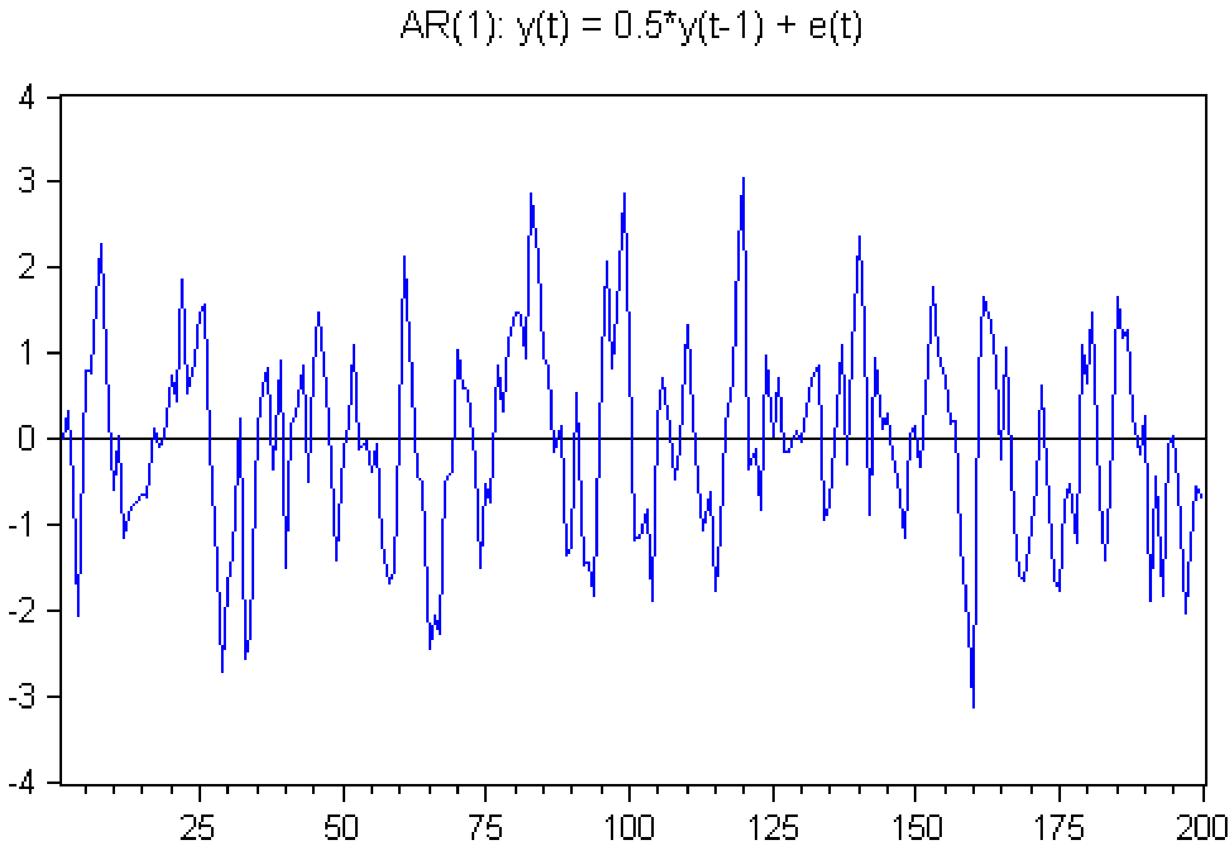
etc.

- Autoregressiv prosess av orden p; AR(p)

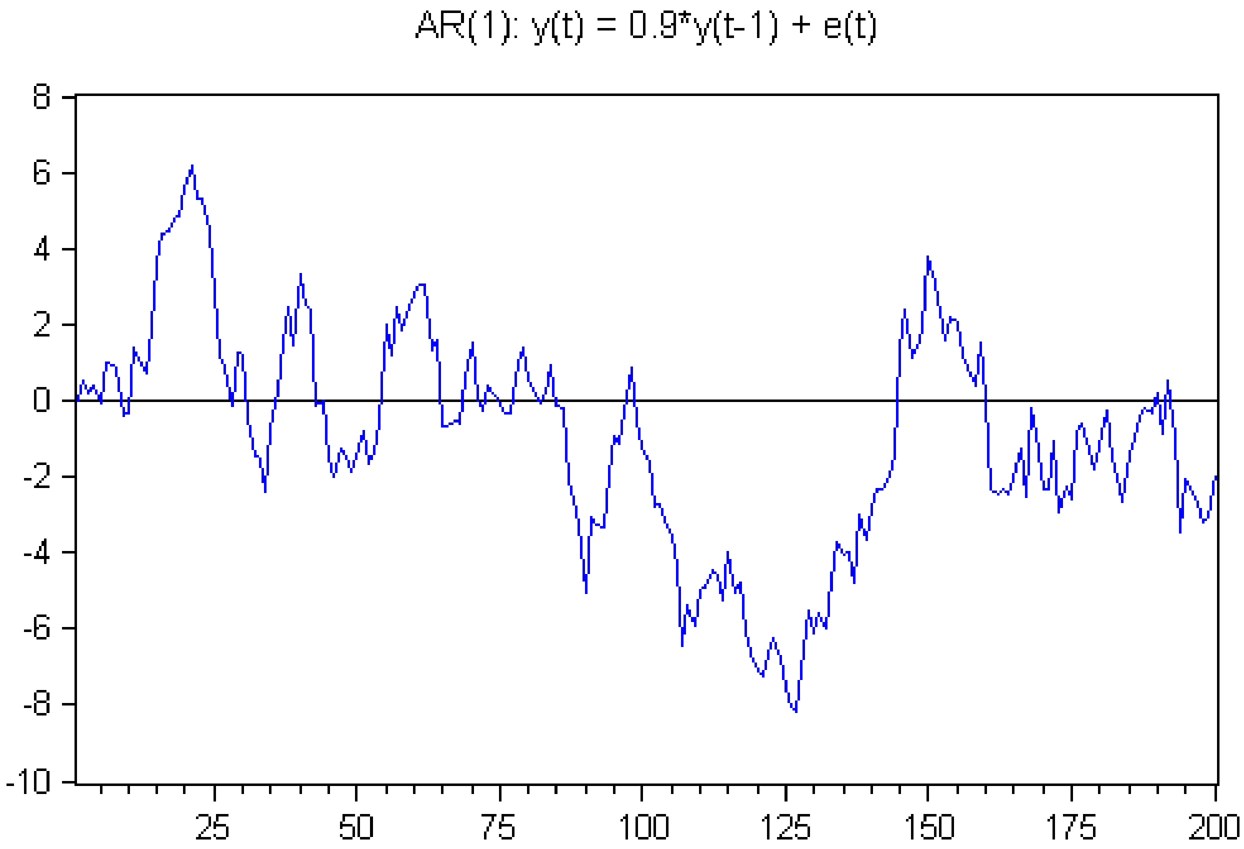
  $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

ARMA(p, q)

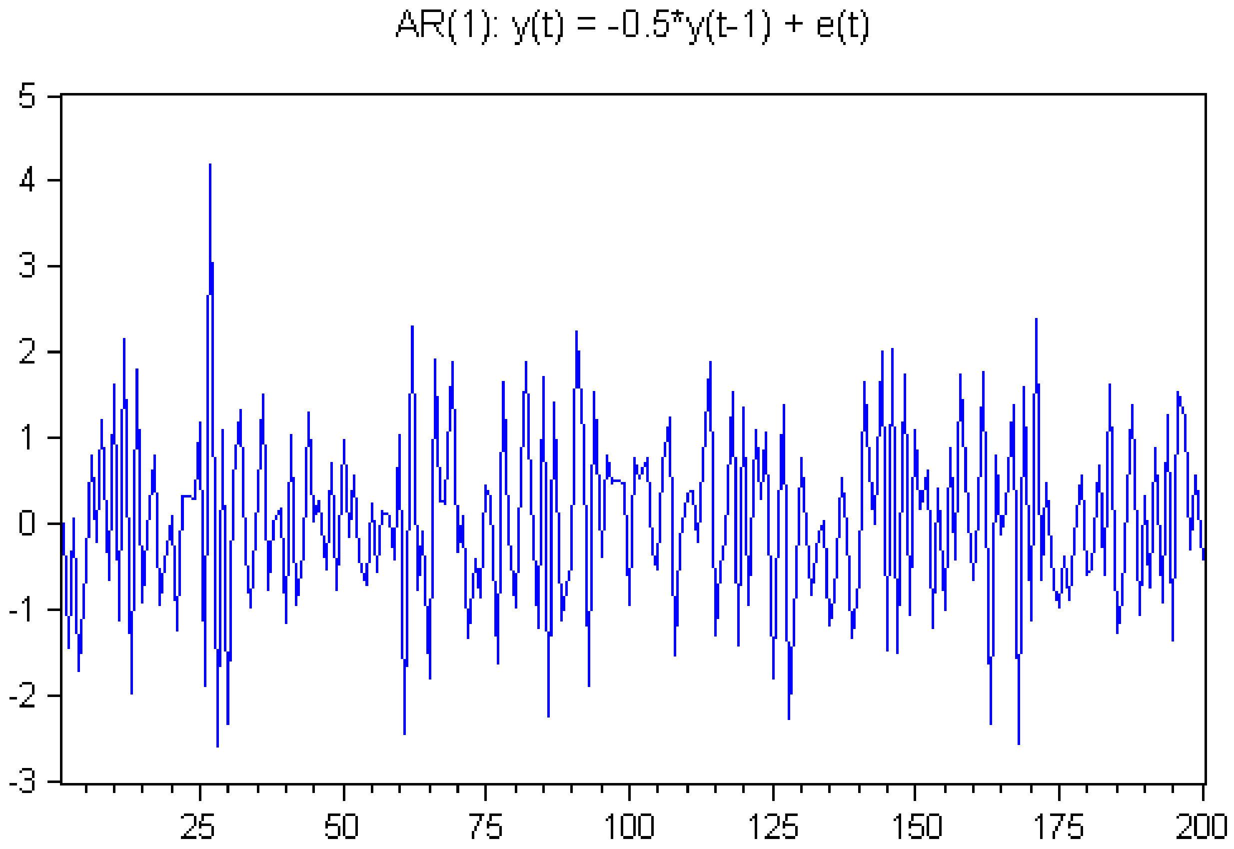
- AR(1):



- AR(1):



- AR(1):



ARMA(p, q)

- Moving average prosess av orden 1; MA(1)

  $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

- Moving average prosess av orden 2; MA(2)

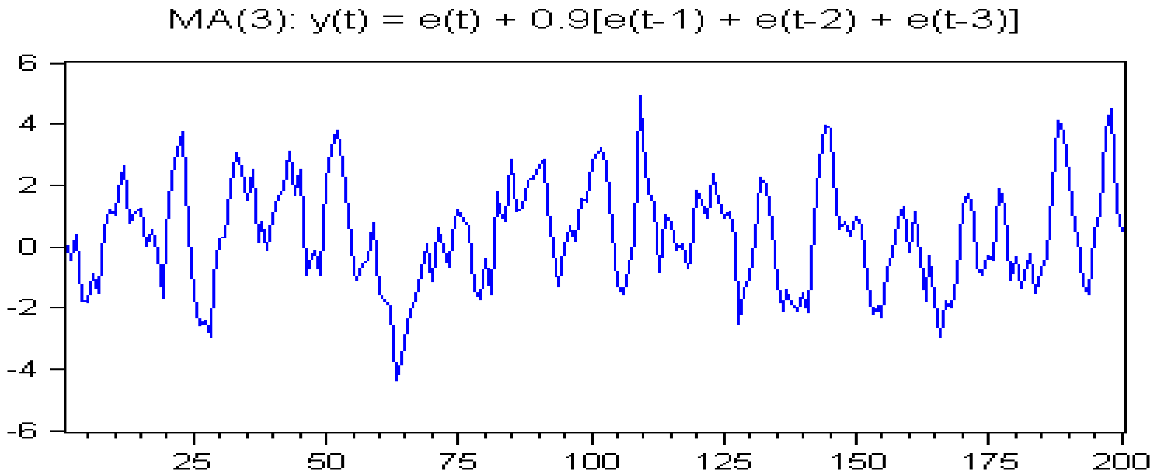
  $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

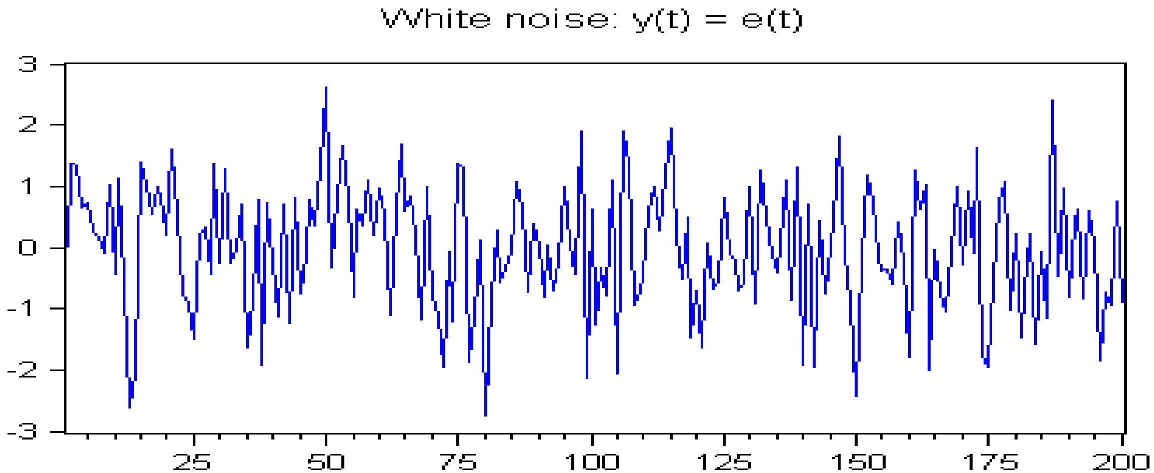
etc.

- Moving average prosess av orden q; MA(q)

  $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Moving average vs. white noise:





ARMA(p, q)

- Autoregressive moving average prosess av orden $(1,1)$; ARMA$(1,1)$

  $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

- Autoregressive moving average prosess av orden $(2,2)$; ARMA$(2,2)$

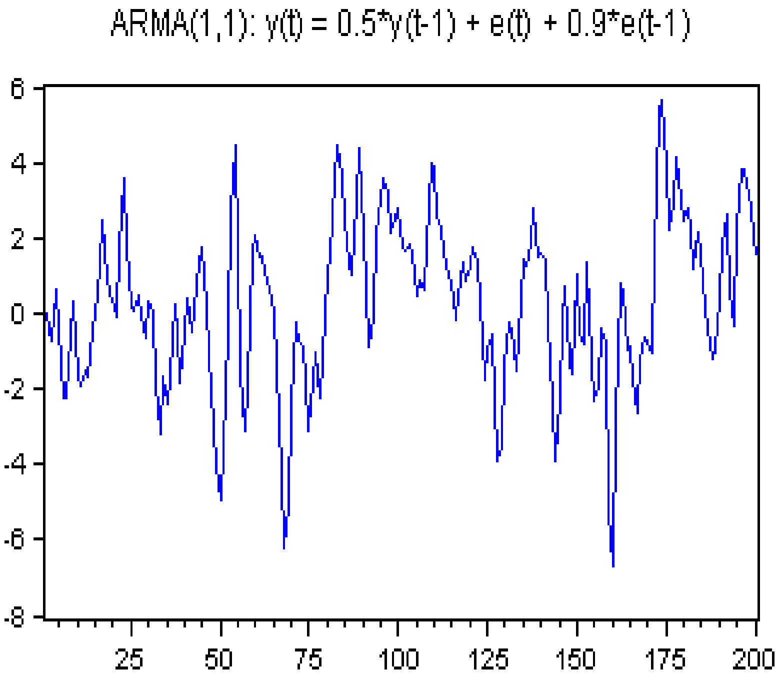
  $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

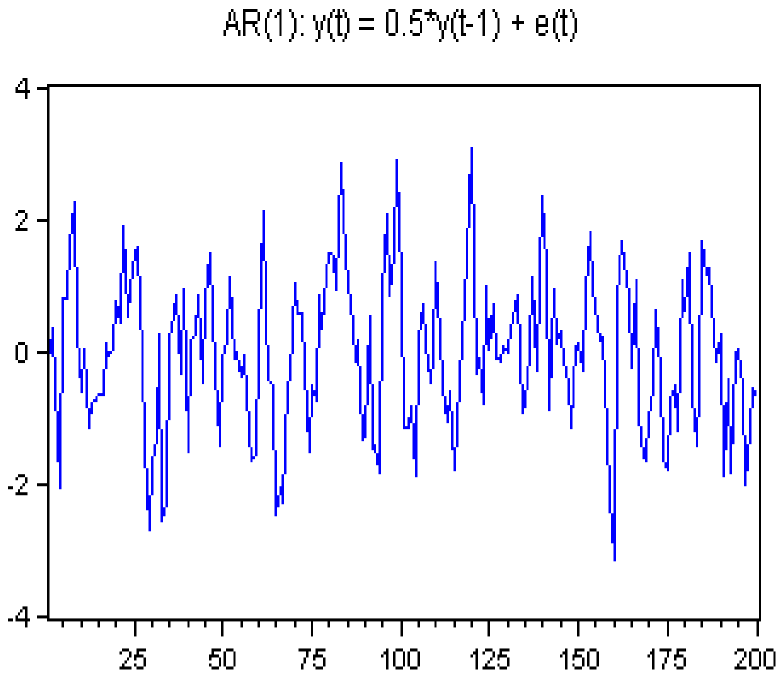
- Autoregressive moving average prosess av orden (p, q); ARMA(p, q)

  $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ARMA(p, q)

- AR(1) vs ARMA(1,1):





ARMA(p, q)

- En ARMA(p, q)-prosess kan også uttrykkes ved hjelp av lag-polynomer:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

er det samme som

$$y_t = \phi_1 L y_t + \cdots + \phi_p L^p y_t + \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \cdots + \theta_q L^q \varepsilon_t$$

Eller, hvis vi flytter alle y_t-leddene over på venstre side:

$$y_t - \phi_1 L y_t - \ldots - \phi_p L^p y_t = \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \ldots + \theta_q L^q \varepsilon_t$$

er det samme som

$$\left(1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p\right) y_t = \left(1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q\right) \varepsilon_t$$

er det samme som

$$\phi(L) y_t = \theta(L) \varepsilon_t$$

der

$$\phi(L) = \left(1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p\right)$$

$$\theta(L) = \left(1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q\right)$$

FRA AR(1) TIL MA(∞)

- Nå skal vi vise at en AR(1) kan uttrykkes som en MA(∞), det vil si at:

  $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

  der $-1 < \phi_1 < 1$.

- Betrakt følgende AR(1):

  $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Merk at vi kan sette inn for $y_{t-1} = \phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$ i y_t:

  $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t = \phi_1(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \phi_1^2 y_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Videre kan vi sette inn for $y_{t-2} = \phi_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$, etc. Denne innsettingsprosedyren kalles rekursiv substitusjon.

FRA AR(1) TIL MA(∞)

- Siden y_t er en del av en uendelig lang tidsserie, $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, får vi følgende:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t = \phi_1(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \phi_1^2 y_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \ldots$$

$$= \phi_1^{\infty} y_{-\infty} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

- Med andre ord, vi har funnet at AR(1)-prosessen kan uttrykkes som en MA(∞), der lag lengre tilbake i tid gis lavere vekt fordi $-1 < \phi_1 < 1$:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots$$

MOMENTER I EN AR(1)-PROSESS

- Betrakt følgende AR(1):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Vi har nettopp vist at denne kan skrives som:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

- Ta forventningen på begge sider for å få et uttrykk for gjennomsnittet:

$$E(y_t) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}\right) = 0$$

MOMENTER I EN AR (1)-PROSESS

- Hva med variansen? Ved å bruke resultatene ovenfor får vi, etter litt mellomregning:

$$\gamma(0) = Var(y_t) = E\big(y_t - E(y_t)\big)^2 = E(y_t)^2 = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}\right)^2$$

$$= E(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots)^2$$

$$= var(\varepsilon_t) + \phi_1^2 var(\varepsilon_{t-1}) + \phi_1^4 var(\varepsilon_{t-2}) + \ldots$$

$$= \sigma^2 + \phi_1^2 \sigma^2 + \phi_1^4 \sigma^2 + \ldots = (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \ldots)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

MOMENTER I EN AR (1)-PROSESS

- Hva med kovariansen? Ved å bruke resultatene ovenfor får vi, etter litt mellomregning:

$$
\begin{aligned}
\gamma(j) = Cov(y_t, y_{t-j}) &= E\left(y_t - E(y_t)\right)\left(y_{t-j} - E\left(y_{t-j}\right)\right) = E\left(y_t y_{t-j}\right) \\
&= E\Big[\big(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \phi_1^j \varepsilon_{t-j} + \phi_1^{j+1} \varepsilon_{t-(j+1)} \\
&\quad + \phi_1^{j+2} \varepsilon_{t-(j+2)} + \ldots\big)\big(\varepsilon_{t-j} + \phi_1 \varepsilon_{t-(j+1)} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-(j+2)} + \ldots\big)\Big] \\
&= \phi_1^j E\left(\varepsilon_{t-j}\right)^2 + \phi_1^{j+2} E\left(\varepsilon_{t-(j+1)}\right)^2 + \phi_1^{j+4} E\left(\varepsilon_{t-(j+2)}\right)^2 + \ldots \\
&= \phi_1^j \sigma^2 + \phi_1^{j+2} \sigma^2 + \phi_1^{j+4} \sigma^2 + \ldots = \phi_1^j [1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \ldots] \sigma^2 \\
&= \phi_1^j \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} = \phi_1^j Var(y_t)
\end{aligned}
$$

MOMENTER I EN AR (1)-PROSESS

- Hva med autokorrelasjonen? Ved å bruke resultatene ovenfor får vi:

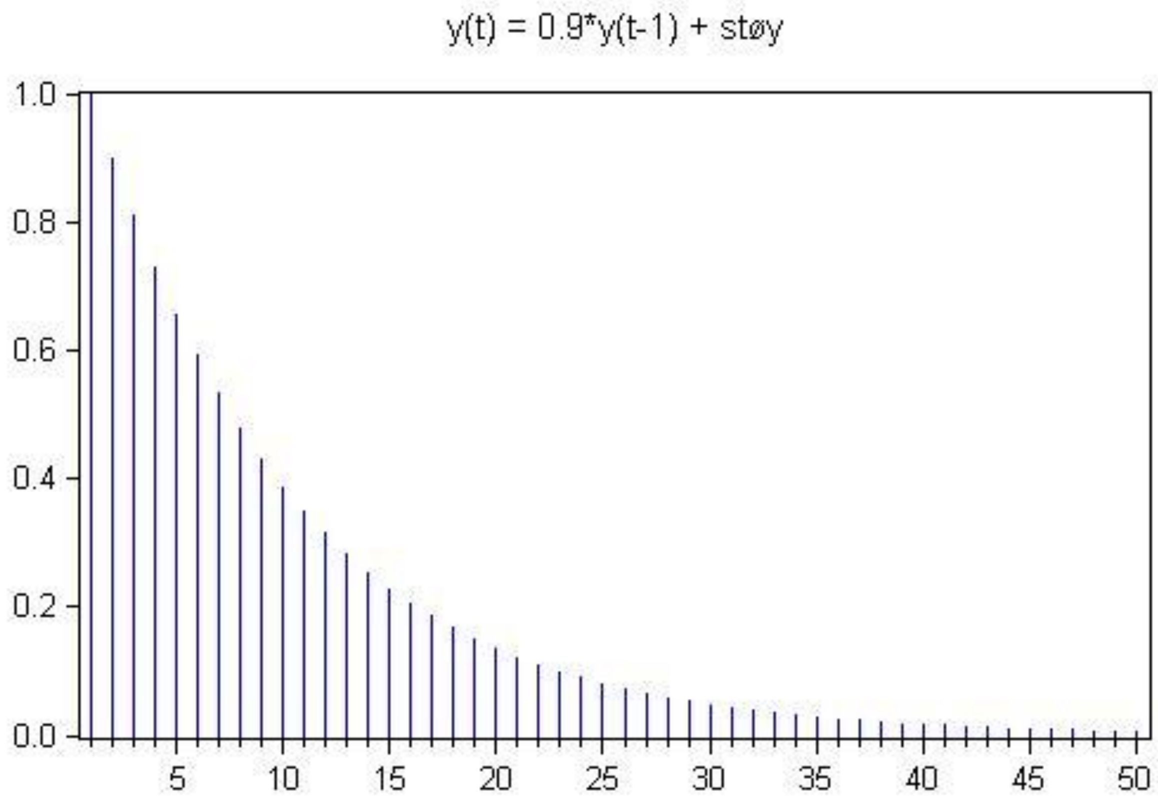
$$\rho(j) = \frac{\gamma(j)}{\gamma(0)} = \frac{cov(y_t, y_{t-j})}{Var(y_t)} = \frac{\phi_1^j Var(y_t)}{Var(y_t)} = \phi_1^j$$

- Hva med autokorrelasjonsfunksjonen? Den blir ganske enkelt:

$$ACF = \sum_{j=0}^{\infty} \rho(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j$$

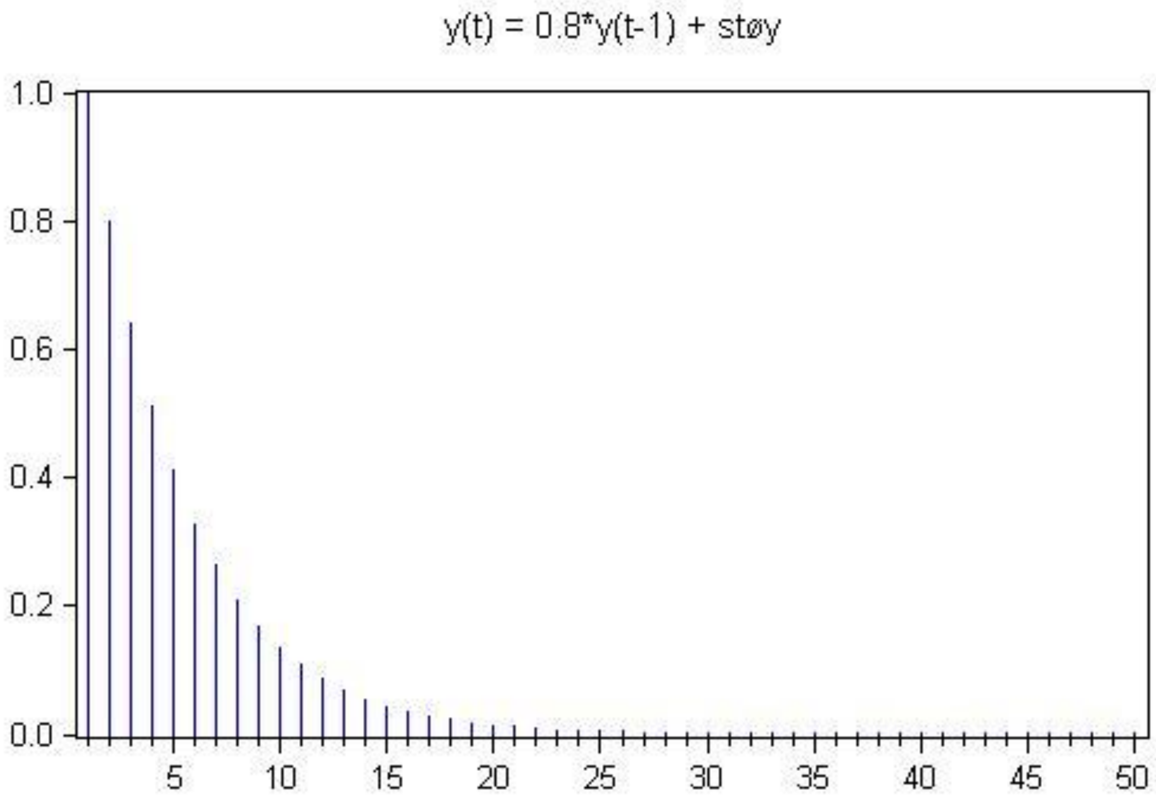
MOMENTER I EN AR (1)-PROSESS

- La oss plotte autokorrelasjonsfunksjonen for utvalgte verdier på ϕ_1. Dersom $\phi_1 = 0.9$:



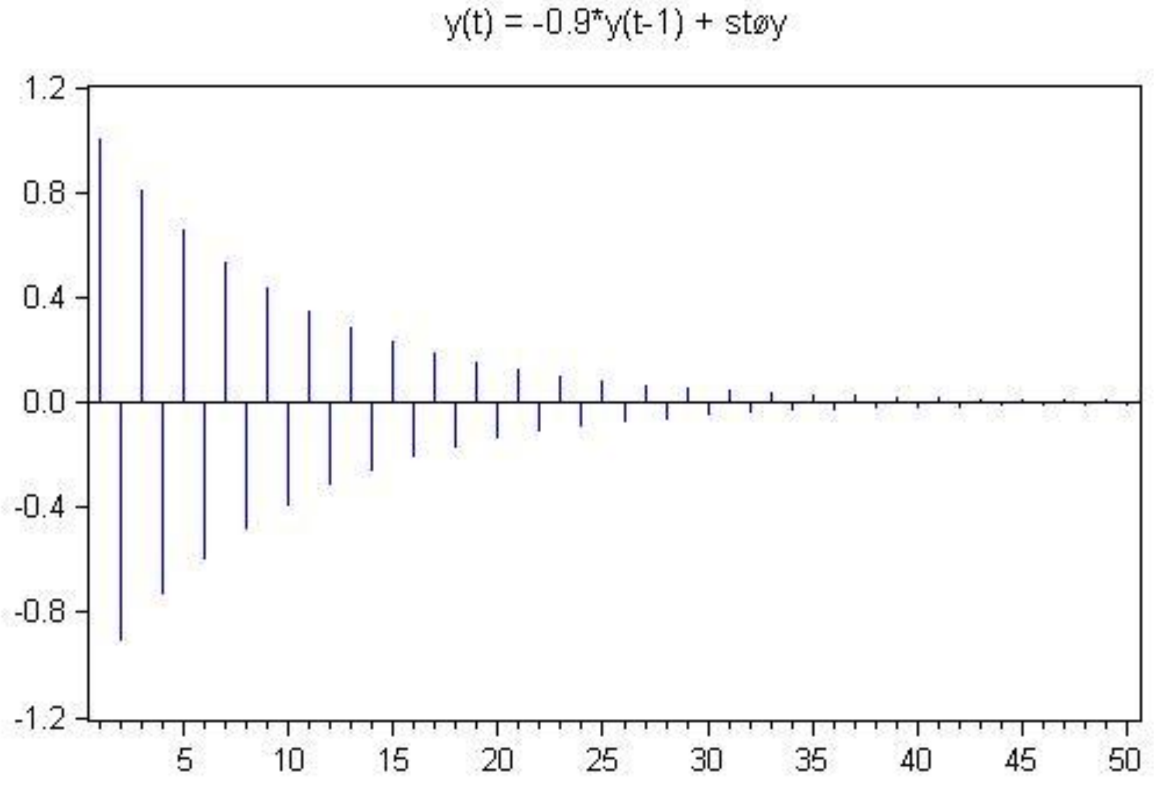
MOMENTER I EN AR (1)-PROSESS

- Dersom $\phi_1 = 0.8$ ser vi at minnet i serien er kortere enn i det forrige tilfellet. Generelt vil minnet i tidsserien være lengre desto nærmere $|\phi_1|$ er 1.



MOMENTER I EN AR (1)-PROSESS

- Dersom $\phi_1 = -0.9$ ”husker” tidsserien like godt som når $\phi_1 = 0.9$, men siden fortegnet er negativt skifter autokorrelasjonsfunksjonen mellom positive og negative verdier:



MOMENTER I EN MA(1)-PROSESS

- Øvelse (løsning gis i timen):

  Betrakt en MA(1)-prosess med konstantledd:

  $y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

  der ε_t er iid $N(0,1)$, $\mu = 2$ og $\theta = 0.5$.

  a. Beregn forventet verdi $E(y_t)$.
  b. Beregn variansen $\gamma(0)$.
  c. Beregn autokovariansen $\gamma(j)$
  d. Er prosessen stasjonær? I så fall hvorfor?
  e. Skisser autokorrelasjonsfunksjonen i en figur for $j = 0,1,2,3$.
  f. Anta nå i stedet at $\theta = -0.5$. Skisser autokorrelasjonsfunksjonen i en figur for $j = 0,1,2,3$.